Année :

Matière : Mathématique

Date : 17 novembre 2010.

Sujet :

N° Étudiant

CREUSÉ

Prénoms : Marion.

Né(e) le :

NOTE de 0 à 20	APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE :

Ne pas écrire dans cette marge

Exercice 1.

(1) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ à l'ordre k.

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + o(x^k)$.

(2) $g(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre k.

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^k)$.

(3) $h(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4

$= (1+x)^{1/2}$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \times \frac{1}{3!} x^3$

$+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right) \times \frac{1}{4!} x^4 + o(x^4)$.

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} \times \left(\frac{-3}{2}\right) \times \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{1}{24}\right) \times \left(\frac{-5}{2}\right) x^4 + o(x^4)$.

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{224}x^4 + o(x^4)$

(4) $h(x) = \operatorname{sh} x$ à l'ordre 4.

$= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$. OK

$= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

5,25 / 6

PARTIE A RABATTRE

Exercice 2 :

$f(x) = \dfrac{2\ln(x^2)}{x^3}$ OK

La fonction f est défini et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(\ln(x^2))' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

1/1

$f'(x) = \dfrac{\frac{4}{x} \times x^3 - 6x^2(\ln(x^2))}{(x^3)^2} = \dfrac{x^2(4-6\ln(x^2))}{x^6} = \dfrac{4-6\ln(x^2))}{x^3}$.

Étude du signe de la dérivée :

x	$-\infty$		0		$e^{1/3}$		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$4-6\ln(x^2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖ $+\infty$	↘	$\frac{4}{3e}$	↗	0

$4-6\ln(x^2) > 0$

$\Leftrightarrow 6\ln(x^2) \lt 4$

$\Leftrightarrow \ln(x^2) \lt \frac{2}{3}$

~~$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} > e^{2/3}$~~

~~$\Leftrightarrow x^2 > e^{2/3}$~~

~~$\Leftrightarrow x > (e^{2/3})^{1/2}$~~

$\Leftrightarrow x \cancel{>} e^{1/3}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \cancel{\dfrac{2\ln(x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}} \dfrac{\ln(x^2)}{x^2} \times \dfrac{2}{x} = -\infty.$

0,5/1

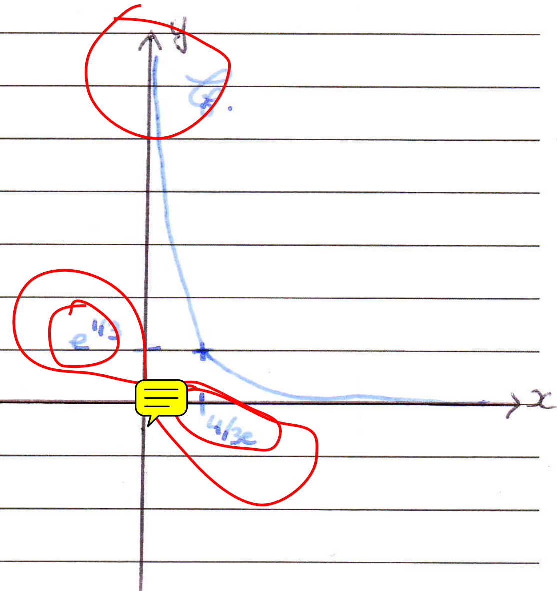
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x^2)}{x^3} = \lim \dfrac{\ln(x^2)}{x^2} \times \dfrac{2}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ OK

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{2\ln(x^2)}{x^3} = \cancel{+\infty}$ $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to e^{1/3}} f(x) = \lim \dfrac{2\ln(x^2)}{x^3} = \dfrac{4}{3e}$

3,5/4

Tracer de la courbe :



Exercice 3 :

Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

DL de $e^{x^2} = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{3!} + \dots + \dfrac{x^k}{k!} + o(x^k)$.

DL de $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{2!} + \dots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{2k!} + o(x^k)$.

Exercice 4 :

$g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$

$(x^2(x-1))' = 2x^2 - 2x + x^2$