7. Intégrales curvilignes

LCSI2U14: Mathématiques
pour les sciences de l'ingénieur

Exercice 1. Calculer $\int_{(C)} \omega$

a. si $\omega = xydx + (x+y)dy$ et si (C) est l'arc de parabole défini par $y = x^2$, x variant de -1 à 2 ;

b. si $\omega = -xy^2dx + x^2ydy$ et si (C) est la demi-cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ fixé, θ variant de 0 à π.

c. si $\omega = y^2dx + x^2dy$ et si (C) est la demi-ellipse d'équation $4y^2 + x^2 - 4 = 0$, $y \geq 0$, parcourue dans le sens indirect.

d. si $\omega = y\sin xdx + x\cos ydy$ et si (C) est le segment de droite OA, parcouru de O à $A = (1,1)$.

e. si

$$\omega = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

et si (C) est le contour du carré $ABCD$, avec $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$, $D = (1,-1)$.

f. si $\omega = y^2dx + x^2dy$ et si (C) est l'ellipse d'équation $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$, parcourue une fois dans le sens direct.

g. si $\omega = xy^2dy - yx^2dx$ et si (C) est le cercle d'équation $y^2 + x^2 - 2y = 0$, parcouru une fois dans le sens direct.

h. si $\omega = 2xdy + ydx$ et si (C) est le contour du domaine défini par $\{x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$, parcouru une fois dans le sens direct.

i. si

$$\omega = \frac{xy}{x^2+y^2}\ (ydx - xdy),$$

et si (C) admet la représentation paramétrique

$$x(t) = a\cos t\sqrt{\cos 2t}, \quad y(t) = a\sin t\sqrt{\cos 2t},$$

t variant de $-\pi/4$ à $\pi/4$.

Exercice 2. Calculer $\int_{(C)} \omega$

a. si $\omega = (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$ et si (C) est la boucle de la courbe d'équation $\{x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$, parcourue une fois dans le sens direct.

b. si $\omega = ydx + xdy$ et si (C) est l'arc de parabole défini par $y = x^2$, x variant de 0 à 2 ;

c. si

$$\omega = \frac{-2xydx + (x^2 - y^2)dy}{x^2+y^2},$$

et si (C) est le quart de cercle $y^2 + x^2 - y = 0$, de $A = (1/2, 1/2)$ à $B = (0,1)$.

d. si $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$ et si (C) est le demi-cercle supérieur de diamètre AB, de $A = (1,2)$ vers $B = (3,4)$.

e. si $\omega = (x^2 + y)dx + (2x + y^2)dy$ et si (C) est le contour du carré $ABCD$, avec $A = (1,1)$, $B = (2,1)$, $C = (2,2)$, $D = (1,2)$, parcouru une fois dans le sens direct.

f. si $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ et si (C) est le contour du triangle OAB, avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, parcouru une fois dans le sens direct.

g. si $\omega = 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2dy$ et si (C) est le contour du triangle ABC, avec $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,3)$, parcouru une fois dans le sens direct.

h. si $\omega = (e^x\cos y + xy^2)dx - (e^x\sin y + x^2y)dy$ et si (C) est l'arc de la lemniscate d'équation $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, θ variant de 0 à $\pi/4$.

Exercice 3. Calculer les aires suivantes

a. aire de
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \forall t \in [0,1],\ \left|x + yt + t^2\right| \leq 1\right\} \ ;$$

b. aire de la boucle de
$$x(t) = t^2 + t^3,\ y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \ ;$$

c. aire limitée par la courbe
$$x(t) = \cos^2 t,\ y(t) = \cos t\ (1 + \sin t) \ ;$$

d. aire de la boucle de la strophoïde droite
$$\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \ ;$$

e. aire de la boucle de
$$\rho = \sqrt{\sin^3 \theta} \ ;$$

f. aire limitée par
$$\rho = \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \ ;$$

g. aire de la boucle de
$$\rho = 1 + \tan(\theta/2) \ ;$$

d. aire comprise entre les 2 boucles du limaçon de Pascal
$$\rho = 2\cos\theta - 1 \ .$$