## 3. Majorations. Études de fonctions

LCSI2U14: Mathématiques
pour les sciences de l'ingénieur

**Exercice 1.** Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2x}{\pi} \;\leq\; \sin x \;\leq\; x.$$

**Exercice 2.** Posons, pour $x \geq 0$,

$$h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

Montrer, pour $x \geq 0$, l'inégalité

$$h(x) \geq \frac{3x^2}{2(3+x)}.$$

**Exercice 3.** On pose $f(0) = \frac{1}{2}$ et, pour $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Vérifier que $f$ est une fonction croissante (on pourra étudier la fonction auxiliaire $g(x) = x^3\, f'(x)$ sur un domaine approprié).

**Exercice 4.** Etudier les fonctions suivantes sur les intervalles indiqués :

$$\textbf{a.}\quad f_a(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}, \qquad I_a = \mathbb{R},$$

$$\textbf{b.}\quad f_b(x) = (1-x)\sqrt{x^2+1}, \qquad I_b = \mathbb{R},$$

$$\textbf{c.}\quad f_c(x) = 2x\cos(2x) - \sin(2x) + \frac{\pi}{2}, \qquad I_c = \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

$$\textbf{d.}\quad f_d(x) = \frac{1}{\cos x} - 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad I_d = \left]-\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}\right[.$$