Formule dite "de Jacobi" Pour un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ et une application T de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}^d$, bijective et telle que le jacobien de T, δT, ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$, alors pour tout ϕ mesurable quasi intégrable sur $T(\mathcal{O})$,

$$\int_{T\mathcal{O}} \phi(x)\,dx = \int_{\mathcal{O}} \phi\circ T(x)\ \delta T(x)\,dx$$

Rappelons que le Jacobien δT est défini par

$$\delta T = \left|\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le d}\right|,$$

où les T_i désignent les applications coordonnées de T, i e, pour $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $Tx\in\mathbb{R}^d$ et s'écrit donc $Tx = (T_i x)_{1\le i\le d}$

Nota. la soi disant formule de Jacobi (Stroock, p 82) a été proposée, sans démonstration, par Leonard Euler en 1769, probablement pour la 1ère fois, et pour $d=2$. Ostrogradski, vers 1830, a proposé la formule pour d quelconque Ce n'est qu'en 1894 que Élie Cartan a fourni la 1ère démonstration rigoureuse, comme application de ses travaux sur les formes différentielles (cf Wikipedia anglais)

On peut écrire la formule "de Jacobi" sous une forme parfois plus commode

$$\int_{\mathcal{O}} \psi\circ T(x)\,dx = \int_{\mathcal{O}} \psi\circ T(x)\ \frac{\delta T(x)}{\delta T(x)}\,dx = \int_{\mathcal{O}} \phi\circ T(x)\ \delta T(x)\,dx = \int_{T\mathcal{O}} \phi(x)\,dx$$

pour peu que l'on choisisse $\phi(x) = \psi(x)\,\frac{1}{\delta T\circ T^{-1}(x)} = \psi(x)\ \delta(T^{-1})(x)$ Ainsi, un énoncé plus commode sera.

$$\int_{\mathcal{O}} \psi\circ T(x)\,dx = \int_{T\mathcal{O}} \psi(x)\ \delta(T^{-1})(x)\,dx$$

Avec des hypothèses convenables sur T, on obtient en particulier, pour X de densité f et $Y=TX$, que

$$\mathbb{E}[\phi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(TX)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi\circ T(x)\ f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\circ T(x)\,dx \quad \text{avec} \quad \psi(y) = \phi(y)\ f\circ T^{-1}(y)$$

$$= \int_{T\mathbb{R}^d} \phi(y)\ f(T^{-1}y)\ \delta(T^{-1})(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\ \mathbb{1}_{T\mathbb{R}^d}(y)\ f(T^{-1}y)\ \delta(T^{-1})(y)\,dy$$

On en déduit que.

Proposition. Sous de bonnes hypothèses sur T, si X a pour densité f, alors $Y=TX$ a pour densité g définie par

$$g(y)=f(T^{-1}y)\ \mathcal{J}(T^{-1})(y)\ \mathbb{1}_{T\mathbb{R}^d}(y)$$

Nota. il pourra être habile, selon les cas, de substituer, dans cette formule, $\mathbb{1}_{T\mathcal{O}}(y)$ à $\mathbb{1}_{T\mathbb{R}^d}(y)$, pourvu que $\mathbb{P}(X\notin\mathcal{O})=0$. C'est en particulier le cas si T est injectif sur $\mathcal{O}$, mais pas sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Exemple 1. Si Y est une transformation affine de X (i.e si $Y=AX+b$, $b\in\mathbb{R}^d$, $A\in GL(d,\mathbb{R})$) alors

$$g(y)=\frac{1}{|\det A|}f(A^{-1}(y-b))$$

(**Démonstration** On choisit $Tx=Ax+b=y \Rightarrow x=T^{-1}y=A^{-1}(y-b)$)

Exemple 2 Si X et Y sont 2 v.a.r indépendantes de densités respectives f et g, alors $Z=X+Y$ a pour densité le produit de convolution, ou convolée, de f et g, défini par

$$f*g(z)=\int_{\mathbb{R}}f(u)\,g(z-u)\,du$$

Démonstration. On choisit $d=2$, $Z=(X,Y)$ et $W=(W_1,W_2)=(X+Y,X)=(W_1,W_2)=TZ$. Donc $z=T^{-1}(w_1,w_2)=(w_2,w_1-w_2)$. On est donc dans le cas d'une transformation linéaire. On peut donc appliquer la formule précédente avec $b=0$, et A de matrice $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$. À cause de l'indépendance de (X,Y), la densité f_Z de Z est $f_Z(x,y)=f(x)\,g(y)$, donc la densité f_W de W est donnée par

$$f_W(w_1,w_2)=\frac{1}{|\det A|}f_Z(w_2,w_1-w_2)=f(w_2)\,g(w_1-w_2)$$

La densité de $S(=W_1)$ est ensuite obtenue par calcul de la 1ère marginale de f_W, i.e par intégration par rapport à w_2, i.e $f_S(w_1)=\int_{\mathbb{R}}f(w_2)\,g(w_1-w_2)\,dw_2$