

Exercice 1. Un composant d'une machine est sujet à des pannes irréparables ; à chaque panne, on effectue donc le remplacement (renouvellement) du composant hors service par un composant neuf. Si on suppose que les durées X_n des vies des composants successivement utilisés sont des v.a. i.i.d., les nombres N_t des composants consommés aux instants t forment un processus de renouvellement. On note f la densité commune des X_n , F leur fonction de répartition, m leur espérance. Les S_n sont les instants de renouvellement (c'est l'exemple qui a donné son nom à la théorie du renouvellement, même si le champ d'application de celle-ci s'est étendu très au-delà par la suite). On paie r pour chaque remplacement consécutif à une panne, et a pour un remplacement anticipé, avant panne. On suppose que $0 < a < r$.

On considère la politique \mathcal{P}_T consistant à remplacer tout composant arrivant à l'âge T immédiatement, sans attendre qu'il tombe en panne : ainsi le coût r est payé plus rarement que pour la politique \mathcal{P}_∞ consistant à ne remplacer un composant que lorsqu'il tombe en panne. En contrepartie, bien qu'on paie moins en moyenne, on paie plus souvent, car la durée d'utilisation $X_n(T)$ est plus courte que la durée de vie X_n .

Pour $0 < T \leq +\infty$, on note $\mathcal{R}_t(T)$ le coût total encouru dans l'intervalle de temps $[0, t]$, du fait des remplacements de composants, lorsqu'on applique la politique \mathcal{P}_T . Montrer que $\mathcal{R}_t(T)/t$ converge presque sûrement, quand t tend vers $+\infty$, vers une limite finie $\varphi(T)$ qu'on calculera en fonction de f , F , et T . Calculer la valeur optimale de T lorsque

- $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$,
- $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t \geq 0}$.

Exercice 2. Le passage des bus à un arrêt est gouverné par un processus de renouvellement $N = (N_t)_{t \geq 0}$ associé à une suite $X = (X_n)_{n \geq 0}$, où le temps séparant deux passages de bus consécutifs est supposé intégrable. On note $A_t = S_{N_t+1} - t$ le temps passé sur l'arrêt par un passager arrivé à la date t , et on pose :

$$W_t = \int_0^t A_s ds.$$

On interprète la limite $\ell(\omega) = \lim_t W_t(\omega)/t$, lorsqu'elle existe, comme le temps d'attente moyen d'un passager. Montrer, à l'aide de la loi forte des grands nombres pour les processus de renouvellement avec récompense, que, presque sûrement,

$$\ell = \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2\mathbb{E}[X_1]}.$$

Indication : on pourra, pour ω fixé, i.e. connaissant la valeurs des $X_n(\omega)$, tracer le graphe de $s \rightarrow A(s)$. Discuter l'inégalité

$$\ell \geq \frac{\mathbb{E}[X_1]}{2},$$

et en particulier le cas d'égalité.

Exercice 3. Ω est $\{a, b\}^{\mathbb{N}^*}$, i.e. Ω est l'ensemble des mots infinis

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots,$$

où la i^e lettre ω_i du mot ω est soit la lettre a , soit la lettre b , avec équiprobabilité, et indépendamment des autres lettres. Pour $t \geq 0$, on note

$$\begin{aligned} A &= aa, & C &= ab, \\ F_A(t, \omega) &= \#\{1 \leq i \leq t \mid \omega_i \omega_{i+1} = aa\}, \\ F_C(t, \omega) &= \#\{1 \leq i \leq t \mid \omega_i \omega_{i+1} = ab\}. \end{aligned}$$

a. *Fréquence.* Montrer que

$$\mathbb{E}[F_A(t)] = \mathbb{E}[F_C(t)] = \frac{\lfloor t \rfloor}{4}.$$

Question facultative : Montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{+\infty} \frac{F_A(t)}{t} = \lim_{+\infty} \frac{F_C(t)}{t} = \frac{1}{4}.$$

b. *Temps d'attente.* On note

$$\begin{aligned} T_A(\omega) &= \min\{i \geq 1 \mid \omega_i \omega_{i+1} = aa\}, \\ T_C(\omega) &= \min\{i \geq 1 \mid \omega_i \omega_{i+1} = ab\}. \end{aligned}$$

Montrer que, pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_A = k) &= \mathcal{F}_k 2^{-k-1} \mathbb{1}_{k \geq 1}, \\ \mathbb{P}(T_C = k) &= k 2^{-k-1} \mathbb{1}_{k \geq 1}, \end{aligned}$$

où \mathcal{F}_k est le k^e nombre de Fibonacci¹. En déduire que :

$$\mathbb{E}[T_A] = 5, \quad \mathbb{E}[T_C] = 3.$$

c. *Processus de renouvellement.* Pourquoi faut-il attendre plus longtemps pour observer le motif A que le motif C , alors qu'ils ont tous deux la même fréquence de $1/4$? On pourra utiliser la loi forte des grands nombres pour 2 processus de renouvellement avec récompense et faire apparaître $1/4$ sous la forme

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathbb{E}[R_A]}{\mathbb{E}[X_A]} = \frac{\mathbb{E}[R_C]}{\mathbb{E}[X_C]},$$

où $1 = R_C < \mathbb{E}[R_A]$, et où les v.a.r. X_A, X_C sont liées aux v.a.r. T_A, T_C .

Remarque. Pour des motifs plus généraux, ce genre d'analyse est à la base de l'étude statistique du génome. La différence entre A et C est que le motif A peut se chevaucher lui-même, alors que ce n'est pas le cas pour C . Vis à vis du chevauchement, un motif comme $D=ababa$ a un comportement plus complexe que A ou C , l'essentiel des caractéristiques d'un motif se traduisant dans ce qu'on appelle le *polynôme d'autocorrélation*.

¹défini par $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$ et $\mathcal{F}_0 = 0, \mathcal{F}_1 = 1$, ou encore par la *formule de Binet* :

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n),$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$ sont les deux solutions de $x^2 = x + 1$ (φ est le *nombre d'or*).

pour le c) de l'exercice 3

- motif A=aa : les blocs de lettres a de longueurs supérieures ou égales à 2 sont séparés par des blocs commençant et finissant par des b, et ne contenant pas le motif A. Les longueurs successives $(A_k)_{k \geq 1}$ des runs de a contiennent $A_k - 1$ fois le motif A, et $A_k - 1$ suit la loi géométrique de longueur $1/2$. Les longueurs successives $(T_k)_{k \geq 1}$ des blocs séparant les runs de a ont même loi que T_A , sauf T_1 qui a même loi que $T_A - 1$. Toutes ces v.a.r. sont indépendantes (on fera appel à l'intuition ou à l'autorité :-). Il faut prendre $X_i = T_i + A_i$ et $R_i = A_i - 1$, ce qui donne $(3-1)/(5+3)=1/4$.
- motif C=ab : les blocs entre les motifs C ont des longueurs T_i de même loi que $T_C - 1$, on prend $X_i = T_i + 2$ et $R_i = 1$, ce qui donne $1/(3-1+2)=1/4$.