

## 6. LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES. INÉGALITÉS.

## L3: PROBABILITÉS

**Exercice 1.** Supposons que  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$ , et que  $f$  est paire. Montrer que  $\text{Cov}(X, f(X)) = 0$ .

**Exercice 2.** On se donne deux v.a.r. indépendantes  $X$  et  $Y$  ayant même espérance, et on note  $m$  la valeur de cette espérance. On pose  $U = \sup(X, Y)$ ,  $V = \inf(X, Y)$  et on note  $x = \mathbb{E}[U]$ . Exprimer  $\text{Cov}(U, V)$  en fonction de  $m$  et  $x$  et en déduire que  $\text{Cov}(U, V)$  est positive ou nulle. Montrer que pour que  $U$  et  $V$  soit non corrélées il faut que  $X$  et  $Y$  soit constants et égaux à  $m$ .

**Exercice 3.** Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions croissantes bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $X$  une v.a.r., alors  $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ .

**Exercice 4.** Démontrer l'inégalité de Jensen: si  $\phi$  est convexe sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (intervalle borné ou pas), si  $X$  est une v.a.r. intégrable et si  $\mathbb{P}(X \in I) = 1$ , alors

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)].$$

On pourra utiliser la propriété suivante des fonctions convexes sur  $I$ :

$$\forall t \in I, \exists a_t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I, \phi(x) \geq a_t(x - t) + \phi(t).$$

**Exercice 5.** Montrer que si on a égalité dans l'inégalité de Jensen et si  $X$  n'est pas constant, alors il y a un intervalle  $J$  tel que à la fois  $f$  est affine sur  $J$  et  $\mathbb{P}(X \in J) = 1$ . En particulier si  $f$  est strictement convexe et qu'il y a égalité dans l'inégalité de Jensen, montrer que  $X$  est constant.

**Exercice 6.** Montrer que si une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifie l'inégalité de Jensen pour toute v.a.r. bornée  $X$  à valeur dans un intervalle  $I$ , alors  $f$  est convexe sur  $I$ . Montrer que si une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifie l'égalité correspondant à l'inégalité de Jensen pour toute v.a.r. bornée  $X$  à valeur dans un intervalle  $I$ , alors  $f$  est affine sur  $I$ .

**Exercice 7.** Montrer que si  $X_n$  converge p.s. vers  $X$ , et si les  $|X_n|$  sont majorés par  $Y \in \mathcal{L}^1$ , alors les  $X_n$  convergent dans  $\mathcal{L}^1$ .

**Exercice 8.** On se donne une fonction continue  $f$ , définie sur l'intervalle fermé borné  $I = [a, b]$ , et une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, à valeurs dans  $I$ . On pose

$$M = \max \{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

a. Montrer que :

$$\lim_n \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right] = f(\mathbb{E}[X_1]).$$

b. *Application.* Dans la suite de cet exercice, on suppose que  $I = [0, 1]$ . Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$  on a :

$$\lim_n B_n(x) = f(x),$$

où  $B_n$  est le  $n$ -ème polynôme de Bernstein, défini par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k/n) x^k (1-x)^{n-k}.$$

*Indication* : on pourra considérer une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires de Bernouilli, indépendantes, et de paramètre  $x$ .

c. Dans la suite de cet exercice, on suppose que les  $X_i$  suivent la loi de Bernouilli de paramètre  $x$  ( $x \in I$ ). Pour  $\varepsilon > 0$ , donner une majoration de

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - x \right| > \varepsilon \right)$$

à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

d. Pour  $h \geq 0$ , on définit le module de continuité  $\omega(h)$  de  $f$  par :

$$\omega(h) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x \in I, y \in I, |x - y| \leq h \}.$$

Montrer que

$$\lim_{0+} \omega(h) = 0.$$

e. Montrer que pour tout  $x$  de  $I$  et tout  $\varepsilon > 0$  on a :

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \omega(\varepsilon) + 2M \frac{x(1-x)}{\varepsilon^2 n}.$$

En déduire le théorème d'approximation de Stone–Weierstrass (toute fonction continue sur  $[0, 1]$  est limite uniforme d'une suite de polynomes).

**Exercice 9.** Les  $X_i$  étant i.i.d. de même loi que  $X$ , de fonction de répartition  $F$ , on note  $\mu_n(\omega)$  (resp.  $q_n(\omega)$ ) la médiane (resp. le premier quartile) de l'échantillon  $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega))$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $\mu_n$  et  $q_n$  convergent *presque sûrement* vers la médiane  $\mu$  et le premier quartile  $q$  de  $X$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , en supposant que  $X$  possède une densité  $f$  strictement positive. On pourra se poser le même type de question concernant le maximum.

a. Notons  $S_n^a = \sum_{k=1}^{2n+1} \mathbb{1}_{X_k \leq a}$ . Montrer que

$$\{S_n^a \leq n\} \Leftrightarrow \{\mu_n > a\}.$$

Proposer une équivalence analogue concernant  $\{\mu_n < b\}$ .

b. Expliciter la loi et l'espérance de  $S_n^a$  en fonction de  $F$ .

c. Discuter le comportement de  $\mathbb{P}(S_n^a \leq n)$  suivant la valeur de  $a$  (on pourra utiliser Hoeffding). Étudier en particulier le cas où  $a = \mu + n^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Conclure pour ce qui est de la convergence presque sûre.

d. Soit  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Montrer que, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_n \mathbb{P} \left( \mu_n \leq \mu + \frac{a}{f(\mu)\sqrt{8n}} \right) = \Phi(a).$$

On aura besoin d'une généralisation du théorème de la limite centrale à une suite de lois binomiales  $\text{Bin}(n, p_n)$ , avec  $\lim_n p_n = 1/2$ , et du deuxième théorème de Dini. Démontrer le théorème de la limite centrale pour la médiane.

e. Généraliser à un échantillon de taille paire.

f. Généraliser à  $q_n$ .

**Exercice 10.** Montrer qu'une condition suffisante pour la convergence p.s. de  $X_n$  est l'existence d'une série convergente  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  à termes positifs telle que

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < +\infty.$$

**Exercice 11.** Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge p.s. si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_N \mathbb{P} \left( \bigcup_{n \geq 0} \{|X_{N+n} - X_n| > \varepsilon\} \right) = 0.$$