5. CONVERGENCE EN LOI
L3: PROBABILITÉS

Exercice 1. On se donne, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles, indépendantes et de même densité de probabilité f, définie par

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

a. *Moments et fonction de répartition* **(2,5=1+1+0,5 pts)** Calculer $\mathbb{E}\left[U_n^k\right]$ pour tous les entiers k et n tels que $k \geq 1$ et $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{P}(U_n > x)$ et $\mathbb{P}(U_n < x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. *Minimum* **(3=3×1 pts)** On pose

$$M_n = \min\{U_k \ : \ 1 \leq k \leq n\}.$$

Calculer $\mathbb{P}(M_n > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que M_n possède une densité f_n que l'on déterminera, et calculer $\mathbb{E}[M_n]$.
c. *Étude de la convergence de M_n* **(3=0.5+0.5+1+1 pts)** On pose

$$A = \{\omega \in \Omega \ : \ \forall n \geq 1, 0 \leq U_n(\omega) \leq 1\}$$

Montrer que pour $\omega \in A$, la suite de nombres réels $M_n(\omega)$ est convergente. On note $M(\omega)$ sa limite. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$. A-t-on $\lim_n \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M]$? Identifier la limite $M(\omega)$, au moins pour ω dans un ensemble de mesure 1.
d. *Convergence en loi* **(2.5=0.5+1+0.5+0.5 pts)** On pose $Z_n = nM_n$. Pour tout nombre réel x, calculer $\lim_n \mathbb{P}(Z_n \leq x)$. On note cette limite $F(x)$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ, et montrer que cette mesure de probabilité μ possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit Z une variable aléatoire réelle de densité f. Que peut-on dire de la suite Z_n par rapport à la variable Z ?

Exercice 2. La suite de v.a.r. X_n converge en loi vers X. Que peut-on en déduire sur la suite $u_n = \mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Q})$?

Exercice 3. Lemme de Scheffé. On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a., et une v.a. X définies éventuellement sur des espaces probabilisés différents. On suppose que toutes ces v.a. sont à valeurs dans le même espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$, et que les lois de ces variables possède des densités par rapport à μ, notées respectivement f_n et f. On suppose enfin que f_n converge μ–presque partout vers f, sur E. On voudrait en déduire que la suite X_n converge en loi vers X.
a. *Partie positive.* Montrer que

$$0 \leq (f - f_n)_+ \leq f.$$

En déduire que

$$\lim_n \int_E (f - f_n)_+ \, d\mu = 0.$$

b. *Partie négative.* En déduire que

$$\lim_n \int_E (f - f_n)_- \, d\mu = 0,$$

puis que

$$\lim_n \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

c. *Conclusion.* Montrer que la suite X_n converge en loi vers X.
d. Si $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{Lebesgue})$, que peut-on dire de la suite $u_n = \mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Q})$?

Exercice 4. a. Calculer la fonction caractéristique $\phi(t)$ d'une v.a.r. Z de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (i.e. dont la densité est $\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$).
b. On suppose que X_n suit la loi de Pascal de paramètre λ/n, i.e. on suppose que pour $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}.$$

Calculer sa fonction caractéristique Φ_n. Montrer que $Y_n = n^{-1} X_n$ converge en loi vers une loi non triviale qu'on déterminera ("non triviale" signifie ici "autre qu'une masse de Dirac").
c. Retrouver directement ce résultat en calculant $\lim_n \mathbb{P}\left(Y_n > x\right)$.
d. Pour une constante $a_n > 0$, on pose $Z_n = \lceil a_n Z \rceil$. Calculer a_n pour que Z_n ait même loi que X_n. Montrer que Z_n/n converge p.s. vers Z.

Exercice 5. On se donne une variable aléatoire réelle U suivant la loi $\mathbb{U}_{[0,1]}$, et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli μ, définie par $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$.
a. Calculer la fonction caractéristique de U, et celle de X_k – on les notera respectivement ϕ_U et ϕ_{X_k}. Pour λ réel, calculer la fonction caractéristique de λX_k.
b. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$. Montrer que la fonction caractéristique Φ_n de Y_n peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi_n(t) = e^{it(1-2^{-n})/2} \cos(t/4)\cos(t/8)\cos(t/16)\ldots\cos(2^{-n-1}\,t),$$

puis sous la forme :

$$\Phi_n(t) = e^{it(1-2^{-n})/2}\; \frac{\sin(t/2)}{2^n\,\sin(t\,2^{-n-1})}.$$

En déduire que Y_n converge en loi vers U.
c. Montrer que Y_n converge presque sûrement. Quelle est la loi de la variable aléatoire limite ?

Exercice 6. On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. aléatoires indépendantes et suivant la loi de Poisson de paramètre $a_n \geq 0$, i.e. pour k entier naturel,

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = e^{-a_n}\,\frac{a_n^k}{k!}.$$

a. Calculer la fonction caractéristique de X_n. En déduire $\mathbb{E}\left[X_n^k\right]$ pour $k \in \{1,2\}$, et $\mathrm{Var}\left(X_n\right)$.
b. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, et $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Calculer la fonction caractéristique de S_n, et en déduire la loi de S_n.
c. On pose

$$Z_n = \frac{S_n - s_n}{\sqrt{s_n}},$$

et on suppose que $\lim_n s_n = +\infty$. Montrer que Z_n converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
d. Calculer la limite de

$$u_n = e^{-n} \sum_{k\geq n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 7. a. On se donne des v.a.r. X_n et X, toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on note $p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$, resp. $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Montrer que la suite X_n converge en loi vers X si et seulement si , pour tout k,

$$\lim_n p_{n,k} = p_k.$$

On pourra utiliser le lemme de Scheffé, ou bien procéder directement.
b. On suppose que X_n suit la loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$. Montrer que X_n converge vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 8. *Inégalité de Le Cam.* On se donne n v.a. indépendantes Y_1, Y_2, $\ldots$,Y_n de lois respectives définies par :

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p_i \text{ et } \mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - p_i,$$

où les p_i sont des nombres réels appartenant à $[0, 1]$. Dans la suite on notera μ_n la loi de $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, et on supposera que la somme des p_i est égale à λ. On notera μ_λ la loi de Poisson de paramètre λ, définie par :

$$\mu_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

On veut démontrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$(1) \qquad |\mu_n(A) - \mu_\lambda(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

a. Calculer $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0)$ et $\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = n)$.
b. On se donne n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, indépendantes entre elles, et de lois respectives définies par $X_i = (Z_i, W_i)$ et :

$$\mathbb{P}(Z_i = m \text{ et } W_i = k) = \begin{cases} 1 - p_i & \text{si } (m,k) = (0,0), \\ e^{-p_i} - (1 - p_i) & \text{si } (m,k) = (0,1), \\ e^{-p_i}\,\frac{p_i^m}{m!} & \text{si } k = 1 \text{ et } m \geq 1. \end{cases}$$

Déterminer les lois de Z_i et W_i. Ces deux v.a. sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{P}(Z_i = W_i)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_i \neq W_i) \leq p_i^2.$$

c. Montrer que

$$\left|\mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} Z_i \in A\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} W_i \in A\right)\right| \leq \mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} Z_i \neq \sum_{1\leq i\leq n} W_i\right)$$

et que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{1\leq i\leq n} Z_i \neq \sum_{1\leq i\leq n} W_i\right) \leq \sum_{1\leq i\leq n} p_i^2.$$

En déduire (1).
d. On fait l'hypothèse supplémentaire $\mathcal{H}$ suivante : $\{p_i$ ne dépend pas de $i\}$, et on note p la valeur commune des p_i ($p \in [0, 1]$). Sous l'hypothèse $\mathcal{H}$, expliciter μ_n, et montrer que

$$(2) \qquad \lim_n \mu_n(\{k\}) = \mu_\lambda(\{k\}).$$

Donner une majoration simple de l'erreur $|\mu_n(\{k\}) - \mu_\lambda(\{k\})|$ à l'aide de (1).

Exercice 9.
Si X est une v.a. positive définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F, ϕ une fonction positive, croissante et de classe $\mathcal{C}_1$ sur $[0, +\infty[$, alors :

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_0^{+\infty} \phi'(x)(1 - F(x))dx$$

et

$$\mathbb{E}[\phi(X \wedge M)] = \int_0^{M} \phi'(x)(1 - F(x))dx$$

On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.r. positives convergent en loi vers une v.a.r. X, et une constante $\beta > 0$. On suppose que la suite $\mathbb{E}\left[X_n^\beta\right]$ est bornée. Montrer que, pour tout α tel que $0 < \alpha < \beta$,

$$\lim_n \mathbb{E}\left[X_n^\alpha\right] = \mathbb{E}\left[X^\alpha\right]$$

On pourra utiliser la décomposition $x = x \wedge M + (x - M)_+$ où x est un réel positif.

Exercice 10. Un paquet de n cartes, numérotées de 1 à n, est soigneusement battu, de telle sorte qu'ensuite les cartes sont distribuées totalement au hasard dans le paquet.
a. Soit X_k la v.a. égale à 1 si la carte n°k est à la k–ème place, et à 0 sinon. Donner sa loi.
b. Soit N le nombre de cartes du paquet qui sont à la place correspondant à leur numéro. Calculer $\mathbb{E}\left[N\right]$ et $\mathrm{Var}\left(N\right)$ sans expliciter la loi de N.
c.* Calculer $\mathbb{P}\left(N \geq 1\right)$ à l'aide de la formule de Poincaré. En déduire $p_{0,n} = \mathbb{P}\left(N = 0\right)$.
d.* Montrer que quand n tends vers $+\infty$, N converge en loi vers $\mathcal{P}(1)$.

Exercice 11. *Loi hypergéométrique.* Une population (ou un ensemble) E de taille N est formé de N_1 éléments du type 1 et de $N_2 = N - N_1$ éléments du type 2. On *tire sans remise* n éléments de E. La loi hypergéométrique $\mathcal{H}_{N,N_1,n}$ de paramètre (N, N_1, n) est la loi de probabilité du nombre X_N d'éléments de type 1 ainsi obtenus.
a. Déterminer cette loi.
b. Intuitivement, lorsque N est très grand devant n, le fait que l'on tire avec ou sans remise n'a pas beaucoup d'importance. Or le cas *sans remise* est nettement plus simple à étudier. Justifier cette intuition en calculant la loi limite de X_N lorsque (N, N_1) tend vers l'infini (n restant fixé) et lorsque la proportion N_1/N converge vers une limite $a \in]0, 1[$.

Exercice 12. On suppose que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. X diffuse. Les fonctions de répartitions de ces v.a.r. sont notées respectivement F_n et F. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers F.

Exercice 13. *Théorème de Bernstein.* On se donne 2 v.a.r. X et Y $\perp\!\!\!\perp$ et de même loi.
1) Montrer que si X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors X+Y et X-Y sont indépendantes.
2) Réciproquement on suppose X et Y de carré intégrable et X+Y et X-Y indépendantes. On veut montrer que, dans ce cas, nécessairement X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, pour un $\sigma \geq 0$. Pour cela :
a. Montrer que $\phi(2t) = \phi(t)^3\phi(-t)$. En déduire que ϕ ne s'annule nulle part.

b. On pose $\psi(t) = \log(\phi(t))$ et $\delta(t) = \psi(t) - \psi(-t)$. Montrer que

$$\frac{\delta(t)}{t} = \frac{\delta(t/2)}{t/2}$$

et $\delta'(0) = 0$ et en déduire que ψ est paire. En considérant $\psi(t)/t^2$, montrer que ψ est constante, et conclure.

Exercice 14. On se donne un couple (X, Y) à valeurs dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}$, de loi décrite par :

$$\mathbb{P}\left(X = k \text{ et } Y = m\right) = \begin{cases} 1-\lambda & \text{si } (m,k) = (0,0), \\ e^{-\lambda} - (1-\lambda) & \text{si } (m,k) = (0,1), \\ e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^m}{m!} & \text{si } k = 1 \text{ et } m \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

où λ désigne un paramètre réel compris entre 0 et 1.
a. Montrer que X suit la loi de Bernouilli de paramètre λ , et que Y suit la loi de Poisson de paramètre λ. Calculer les fonctions caractéristiques de X et de Y.
b. Montrer que $\mathbb{P}\left(X \neq Y\right) \leq \lambda^2$.
c. On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes $Z_n = (X_n, Y_n)$, à valeur dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}$, dont la loi est décrite par la formule (3), mais avec un paramètre

$$\lambda_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

On pose $V_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, et $W_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ Montrer que $\lim_n V_n = +\infty$ p.s., et faire de même pour $\lim_n W_n$. Montrer que, presque sûrement, la limite de $(V_n - W_n)$ existe et est finie.
d. Montrer que pour tout couple de nombres réels x et y,

$$\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq \min\left\{2, |x-y|\right\}.$$

On se donne deux suites de nombres réels, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$, et on suppose que : $\lim_n a_n = 0$. Montrer que :

$$\lim_n \left|\mathbb{E}\left[e^{ita_n(V_n-b_n)}\right] - \mathbb{E}\left[e^{ita_n(W_n-b_n)}\right]\right| = 0.$$

Notons que $|\mathbb{E}\left[Y\right]| \leq \mathbb{E}\left[|Y|\right]$ reste vrai pour les v.a. Y à valeurs complexes.
e. Calculer la fonction caractéristique de W_n. Montrer que

$$\frac{V_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \overset{\text{loi}}{\rightarrow} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} dx.$$

On rappelle que :

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1),$$

et que

$$e^z = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + o(z^2).$$

La constante $\gamma \simeq 0,577\ldots$ est dite *constante d'Euler.*
f. On tire une permutation σ au hasard dans le groupe symétrique d'ordre $n!$, et on note $C_n(\sigma)$ le nombre de cycles apparaissant dans la décomposition de σ en cycles disjoints. Montrer que V_n et C_n ont même loi. En déduire que C_n peut s'écrire :

$$C_n = \log n + Z_n \sqrt{\log n}.$$

où Z_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Exercice 15. On dit que X a une loi de type *treillis* si il existe deux nombres réels a et b tels que $\mathbb{P}\left(X \in \{ak+b | k \in \mathbb{Z}\}\right) = 1$, ou encore tels que $\mathbb{P}\left((X-b)/a \in \mathbb{Z}\right) = 1$. Soit ϕ la fonction caractéristique de X.
a. En écrivant explicitement la fonction caractéristique de $(X-b)/a$, montrer que si X est de type treillis il existe une famille de réels $t_k \neq 0$ tel que $|\phi(t_k)| = 1$.
b. Montrer que X est de type treillis si et seulement si il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\phi(t_0)| = 1$ (on pourra utiliser l'inégalité $\mathrm{Re}\left(e^{it_0 x}/\phi(t_0)\right) \leq 1$, et étudier à quelle condition, sur x, il y a égalité).
c. Montrer que si il existe un couple (t, t') de réels non nuls et incommensurables (i.e. de rapport irrationnel), tels que $|\phi(t)| = |\phi(t')| = 1$, alors X est constant.
d. Etant donné deux v.a.r. indépendantes X et Y de lois respectives μ et ν , donner une condition nécessaire sur μ et ν pour que $X+Y$ soit constante.

Exercice 16. La fonction $t \mapsto \phi(t) = \cos(t^2)$ peut-elle être la fonction caractéristique d'une v.a.r. ? Même question pour $\phi(t) = e^{-i|t|}$.

Exercice 17. Est-il possible de truquer deux dés de sorte que la somme des résultats des lancers des 2 dés soit uniformément répartie sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$?

Exercice 18. On se donne une famille $(X_{k,n})_{k\geq 0, n\geq 0}$ de variables de Bernouilli indÈpendantes, de paramètres respectifs $p_{k,n}$. On suppose que, pour un n fixé, les $p_{k,n}$ sont tous nuls sauf un nombre fini, et que

$$\sum_{k\geq 0} p_{k,n} = \lambda \quad \text{pour tout } n$$

a. Soit $Y_n = \sum_{k\geq 0} X_{k,n}$. Montrer qu'elle est p.s. à valeur dans $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction caractéristique.
b. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ .
c. On suppose que

$$M_n = \sup_k \; p_{k,n}$$

tends vers 0. Montrer que Y_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ. On pourra utiliser la détermination suivante de $\log(1-z)$:

$$\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n},$$

et vérifier alors que

$$|z + \log(1-z)| \leq |z|^2, \text{ si } |z| \leq 1/2$$

Exercice 19. Considérons l'algorithme standard de recherche du maximum dans une liste de nombres $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

(1) $M \to x_1$;
(2) Pour $i = 2$ à n, faire :
(3) Si $M < x_i$ alors $M \to x_i$;
(4) Fin i.

dans lequel on fait $n-1$ tests $M < x_k$, et R affectations $M \to x_k$. R est le nombre de "records" ; il dépend de l'ordre dans lequel sont rangés les x_i, et est donc aléatoire (on suppose tous les ordres équiprobables). Dans le meilleur des cas $R = 1$, et dans le pire des cas $R = n$; on voudrait cependant être plus

précis sur le temps T que coûte l'algorithme (T est de la forme $a + bn + cR$ avec des constantes a, b et c qui dépendent de la machine et du langage utilisé) et calculer $\mathbb{E}[T] = a + bn + c\mathbb{E}[R]$ ainsi que $\mathrm{Var}(T) = c^2\mathrm{Var}(R)$. Pour cela on fait apparaître R comme une somme de v.a. indépendantes simples.
a. On note Y_k le rang relatif de x_k dans $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, c'-à-d. le rang de x_k une fois que $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est rangée dans l'ordre croissant. Par exemple :
b. En supposant tous les ordres équiprobables pour $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifier que

$$\mathbb{P}(Y_1 = y_1 \text{ et } Y_2 = y_2 \text{ et } \dots \text{ et } Y_n = y_n) = 0$$

sauf si pour tout k y_k est compris entre 1 et k, auquel cas cette probabilité vaut $\frac{1}{n!}$; en déduire que les Y_i sont indépendants et donner leurs lois.
c. Exprimer R en fonction des Y_i et résoudre les questions de l'introduction, c'-à-d. calculer $\mathbb{E}[R]$ et $\mathrm{Var}(R)$.
d. Calculer la fonction génératrice $g_R(s)$; à l'aide de g_R, calculer $\mathbb{P}(R = i)$ pour $i \in \{1, 2, n-1, n\}$, puis retrouver les résultats à l'aide d'un raisonnement direct.
e. On note $R'(\sigma)$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles disjoints, et on considère R' comme une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où Ω serait le groupe symmétrique d'ordre $n!$, muni de la loi uniforme. Montrer que R' a même loi que R.