Feuille 1

Exercice 1. Il suffit de montrer que pour tout ϕ appartenant à une classe $\mathcal{C}$ séparante de $(E, \mathcal{E})$

$$\mathbb{E}[\phi(f(X))] = \mathbb{E}[\phi(f(Y))]$$

Or, pour toute fonction ϕ mesurable positive, $\phi(f(X))$ et $\phi(f(Y))$ sont quasi-intégrables, et on a, en vertu du th. de transfert,

$$\mathbb{E}[\phi(f(X))] = \int_E \phi \circ f \, d\mathbb{P}_X \underset{\text{car } \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y}{=} \int_E \phi \circ f \, d\mathbb{P}_Y = \mathbb{E}[\phi(f(Y))] \qquad \text{(CQFD)}$$

Exercice 3. Notons.

$$A = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) < X(\omega)\} \quad \text{et} \quad B_x = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq x < X(\omega)\}$$

Alors, suivant un lexique bien établi, comme on a l'équivalence.

$$(*) \quad \{Y < X\} \Leftrightarrow \{\exists x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } Y \leq x < X\},$$

on en déduit que

$$\{\omega \in A\} \Leftrightarrow \{\exists x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } \omega \in B_x\},$$

ou encore, que

$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} B_x$$

Dans $(*)$, le sens $\Leftarrow$ est évident, et le sens $\Rightarrow$ provient de ce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on peut appliquer l'inégalité de Boole pour conclure, puisque $\mathbb{P}(B_x) = 0$, que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} B_x\Big) \leq \sum_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}(B_x) = 0 \qquad \text{(CQFD)}$$