1er semestre 2011/12

M1 U 11 : Abrégé de cours

Groupes de transformations

Les notes suivantes, disponibles à l'adresse `http://www.iecn.u-nancy.fr/~bertram/`, contiennent les définitions et les résultats principaux du cours. Elles ne remplacent ni un polycopié complet, ni le cours lui-même.

Le sujet principal du cours est une introduction à la *géométrie projective* qui met en relief l'importance des *groupes de symétrie.* Il s'agit donc d'un cours de "géométrie avancée" : tandis que le cadre des cours de géomètrie de Licence était toujours la *géométrie euclidienne* et l'*espace euclidien* (i.e., $\mathbb{R}^n$, muni d'un produit scalaire), nous allons rencontrer dans ce cours une "géométrie non-euclidienne" : le concept d'espace change. L'*espace projectif* ne s'identifie pas à un espace $\mathbb{R}^n$, mais peut être construit à partir de $\mathbb{R}^n$ de plusieurs façons, par exemple, en rajoutant à $\mathbb{R}^n$ des "points à l'infini".

Les raisons pour un tel changement du concept d'espace apparaissent historiquement avec les débuts d'une étude approfondie des principes du *dessin en perspective.* En langage moderne : les *perspectives*, d'un plan E sur un autre E', sont des applications obtenues en "projetant", à partir d'un point de l'espace c (le centre de la projection), un point x de E sur le point d'intersection x' de la droite (cx) avec E', si ce point est bien défini. On peut visualiser ce genre d'application en utilisant une source de lumière au centre c et en projetant des dessins d'un plan transparent E sur un autre plan transparent E'. Par exemple, un cercle sur E donne lieu à un cône de lumière, et ce cône de lumière intersecte un autre plan E' en une *conique* : ellipse, parabole ou hyperbole, selon la position de E' (si le centre c n'appartient pas à E'). L'application $E \to E'$ ainsi définie ne peut donc pas être une application affine, car une application affine ne peut pas envoyer un cercle sur une hyperbole. Ainsi on voit apparaître un nouveau type d'application, les *applications projectives* ou *homographies*, qui donne lieu à un groupe, le *groupe projectif.* L'étude de ce groupe, ou plutôt de son action, ainsi que de ses sous-groupes, est en grande partie équivalente à l'étude de la géométrie projective elle-même (c'est un point de vue expliqué pour la première fois par Felix Klein en 1872 dans son célèbre "programme d'Erlangen"). Les espaces projectifs réels et complexes, $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{CP}^n$, se trouvent au carrefour de la plupart des branches des mathématiques modernes ayant des liens avec la géométrie, et leur étude est indispensable pour toute poursuite d'études en mathématiques, mais aussi en vue d'une préparation approfondie à l'enseignement des mathématiques.

Littérature. Il existe de nombreux ouvrages qui traitent de ces sujets. L'œuvre

[Berger] Berger, M., "Géométrie" (plusieurs tômes), Nathan 1979 (traduction anglaise chez Springer, en 2 volumes)

est une vraie mine d'or, avec de très nombreuses illustrations. Le niveau est assez élévé et le contenu encyclopédique – l'achat est un très bon investissement pour toute la vie. Une version plus facilement abordable est

[Audin] Audin, M., "Géométrie", Belin 1998.

Un autre livre utile et utilisé dans la préparation de ce cours est

[Sidler] Sidler, J.-C., “Géométrie projective – cours et exercices et problèmes corrigés”, Dunod, 2000.

Nous recommandons également d'imprimer et de lire l'introduction et le chapitre 1 du projet d'un livre de géométrie projective par Daniel Perrin, disponible à l'adresse

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html`

On y trouve de nombreuses autres références bibliographiques (nous donnons quelques-unes au fur et à mesure du cours). Des origines historiques de la géométrie projective – la théorie ancienne grecque des coniques, le dessin en perspective de la Renaissance, les débuts de la géométrique algébrique, liée à des noms comme Appolonius, Pappus, Pascal, Desargues, Poncelet, Moebius, Klein et bien d'autres.... – y sont évoquées – voir aussi [Berger], ou, pour un premier survol,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_(graphical)#History`
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Programme_d'Erlangen`

Les trois premiers chapitres du cours suivant fournissent une introduction plus précise et plus mathématique au sujet.

Chapitre 1 : Introduction aux droites projectives

1.1. La droite affine réelle. C'est la droite réelle $\mathbb{R}$, où l'on “oublie” l'origine 0 : une application affine est une application de la forme $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',a'b+b'}$, et $f_{a,b}$ est inversible ssi $a \neq 0$, avec inverse $(f_{a,b})^{-1} = f_{a^{-1},-a^{-1}b}$. Le groupe affine ou “groupe $ax + b$” est le groupe

$$\mathrm{GA}_1(\mathbb{R}) = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $a = 1$, on obtient les translations. Quant à la géométrie, la notion fondamentale est celle du rapport d'un triplet de points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $z \neq y$, définie par

$$R(x, y, z) := \frac{z - x}{z - y}.$$

Par un calcul direct, on voit que $R(x, y, z) = r$ ssi $x = (1 - r)z + ry$.

1.2. Lemme. *Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine si, et seulement si, elle préserve le rapport :*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, (z \neq y) : \qquad R\big(f(x), f(y), f(z)\big) = R(x, y, z).$$

Si D est une droite quelquonque du plan $\mathbb{R}^2$, alors, après choix d'un repère affine dans D (i.e., d'une origine $o \in D$ et d'un vecteur directeur $p \in D$, $p \neq o$), on identifie $\mathbb{R}$ avec D via $t \mapsto tp + (1 - t)o$. Le lemme implique qu'on peut définir le rapport de trois points $(x, y, z) \in D^3$ avec $y \neq z$ à l'aide de n'importe quel repère affine de D. On le note toujours $R(x, y, z)$.

1.3. Définition. Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan réel, soient D et D' deux droites de E et p un point n'appartenant pas à $D \cup D'$. La perspective de centre p de D sur D' est l'application f_p définie comme suit : si $x \in D$ est tel que la droite (xp) n'est pas parallèle à D', alors,

$f_p(x)$ est le point d'intersection de (xp) et de D' ; sinon, $f_p(x)$ n'est pas défini [faire un dessin !].

1.4. Exercice (TD). Si D et D' sont parallèles, alors la perspective f_p est une application affine de D sur D', mais sinon, ce n'est pas le cas : d'une part, f_p n'est pas définie pour tout point $x \in D$; mais même si on définit $f_p(x)$ en ce point de façon convenable, l'application f_p ainsi définie ne préservera pas le rapport et ne sera donc pas affine. La question se pose alors de savoir quelle "quantité géométrique" est préservée par les perspectives – on verra plus tard qu'une telle quantité, appelée *birapport*, existe.

1.5. Définition. La droite affine complétée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin \mathbb{R}$ est un nouvel élément, appelé "point infini".

Commentaires. (1) Attention : contrairement aux habitudes en analyse, il n'y a pas de distinction entre des éléments notés $+\infty$ et $-\infty$! En quelque sorte, on pense plutôt que les deux bouts de la droite réelle se rejoignent en un seul point, ou qu'on "recolle" ces deux bouts par le point ∞ pour former un nouvel objet ressemblant à un cercle.

(2) Cette définition est un peu ad hoc, mais au moins elle permet de définir les perspectives de façon satisfaisante : nous posons $f_p(x) = \infty'$ si (xp) est parallèle à D'. De cette manière on aura une bijection entre les droites complétées $\overline{D} = D \cup \{\infty\}$ et $\overline{D}' = D \cup \{\infty'\}$ (exercice). Pour rendre ces définitions plus abordables à des calculs, nous donnons maintenant une "construction" (un "modèle analytique") de la droite complétée. Elle utilise l'astuce de passer par $\mathbb{R}^2$:

1.6. Définition. Pour $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit $[P] := D_{0,P} := \{tP | \, t \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace vectoriel de dimension 1 et de base P. La droite projective réelle $\mathbb{RP}^1$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 :

$$\mathbb{RP}^1 := \Big\{ D_{0,P} \quad \Big| \, P \in \mathbb{R}^2, P \neq 0 \Big\}.$$

Si $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $P \neq 0$, on écrit souvent $[P] := D_{0,P} = \mathbb{R}P$ pour un point de $\mathbb{RP}^1$. La notation $[(x_1, x_2)] =: [x_1 : x_2]$ est courante. Comme, pour $t \in \mathbb{R}^\times$, les droites $[P]$ et $[tP]$ sont les mêmes, on a alors $[tx_1 : tx_2] = [x_1 : x_2]$. (Attention : $t = 0$ n'est pas admis, car $\mathbb{R}0$ n'est pas une doite !) Pour le lemme suivant, faire un dessin en prenant pour b_1, b_2 la base canonique e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$:

1.7. Lemme. *Soit b_1, b_2 une base de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application*

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^1, \quad r \mapsto [rb_1 + b_2]$$

est injective (nous la considérons comme une inclusion), et avec $\infty := [b_1]$, on a

$$\mathbb{RP}^1 = j(\mathbb{R}) \cup \{\infty\} \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Remarque 1. Dans la définition 1.6 (contrairement à 1.5), le point ∞ ne joue aucun rôle distingué ; ce n'est qu'après choix d'une base qu'on obtient la décomposition $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Comme tout vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$ peut servir comme premier vecteur de base b_1, n'importe quel point de $\mathbb{RP}^1$ peut servir comme "point infini". Nous allons voir tout au long de ce cours que la définition 1.6 est bien adaptée aux questions géométriques liées aux perspectives et au birapport.

Remarque 2. La définition 1.6 et le lemme 1.7 gardent tout leur sens si on remplace $\mathbb{R}$ par n'importe quel corps $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Ainsi la droite projective $\mathbb{KP}^1$ peut être définie de la même manière, et un bon nombre de définitions et de propriétés (algébriques) sera valable pour tout corps $\mathbb{K}$. Le cas des nombres complexes $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est particulièrement important. Le lemme 1.7 donne alors

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Mais, attention, il est plus difficile de faire des dessins, car $\mathbb{C}^2$ a 4 dimensions réelles – en fait, si la représentation de $\mathbb{RP}^1$ par un cercle semble assez naturelle, il est déjà moins évident que $\mathbb{CP}^1$ sera représenté par la sphère de Riemann (la complétion du plan complexe par un seul point, le "pôle nord") ! Certaines propriétés ("topologiques", en particulier) dépendent donc fortement du corps de base $\mathbb{K}$. Dans ce cours, nous serons principalement intéressés par la comparaison entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Voici un exemple simple et important :

1.8. Lemme. *L'application*

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, x_1^2 + x_2^2 = 1\} \to \mathbb{RP}^1, \quad P \mapsto [P]$$

est surjective et $2:1$ *(i.e., tout élément de* $\mathbb{RP}^1$ *a deux images réciproques), et*

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \big|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \to \mathbb{CP}^1, \quad P \mapsto [P]$$

est surjective, et les fibres (= images réciproques d'un élément) sont en bijection avec le cercle unité de $\mathbb{C}$.

On dira, en langage de topologie : dans le cas réel, l'application est un revêtement (à deux feuillets), tandis que dans le cas complexe il s'agit d'une fibration (en cercles). Un autre cas intéressant, de nature opposée, est celui d'un corps fini : rappellons que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier) est le corps à p éléments, alors la droite projective $\mathbb{KP}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ a $p + 1$ éléments.

Chapitre 2 : Introduction aux plans projectifs

2.1. Le plan affine sur un corps. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le plan affine sur $\mathbb{K}$ est le plan $\mathcal{P} = \mathbb{K}^2$ où l'on "oublie" l'origine. Les applications affines et le groupe affine $\mathrm{GA}_2(\mathbb{K})$ sont définis comme au point 1.1 (en remplaçant a par une matrice 2×2 et la condition $a \neq 0$ par $\det a \neq 0$). La notion de "rapport" pour un triplet de points $(x, y, z) \in \mathcal{P}^3$ n'a de sens que si les trois points sont alignés. Ainsi la notion de colinéarité devient importante : pour $o \neq p$, on note

$$D_{o,p} := o \vee p := \{tp + (1-t)o | t \in \mathbb{K}\}$$

la droite qui relie o et p, et

$$\mathcal{D} := \left\{ D_{o,p} \quad \Big| \quad p, o \in \mathcal{P}, p \neq o \right\}$$

l'ensemble des droites affines dans $\mathcal{P}$. Alors les propriétés suivantes sont bien connues (mais il sera utile de revoir la preuve comme exercice) :

2.2. Lemme. *Pour deux droites* $D = D_{o,p}$, $D' = D_{o',p'} \in \mathcal{D}$ *sont équivalentes :*

(1) $D = D'$ *ou* $D \cap D' = \emptyset$,

(2) *leurs vecteurs directeurs sont proportionnelles :* $\exists \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(p-o) = p' - o'$.

On dira alors que D et D' sont parallèles, noté $D \parallel D'$.

2.3. Lemme. *Dans tout plan affine* $\mathcal{P} = \mathbb{K}^2$*, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(A1) $x, y \in \mathcal{P}, x \neq y \Rightarrow \exists^! D \in \mathcal{D} : x, y \in D$ *;*

(A2) $x \in \mathcal{P}$, $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists^! D' \in \mathcal{D}$: $D' \parallel D$ *et* $x \in D'$ *;*

(A3) $\forall D \in \mathcal{D}$: $|D| \geq 2$ *;*

(A4) *il existe au moins* 3 *points non colinéaires.*

2.4. Définition. Un plan affine abstrait est un ensemble $\mathcal{P}$ (de "points") et un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de $\mathcal{P}$ (dites des "droites de $\mathcal{P}$") tels que les propriétés (A1) – (A4) sont vérifiées (où la notation $D \parallel D'$ est définie par : $D = D'$ ou $D \cap D' = \emptyset$). Une collinéation de ce plan affine est une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui "envoit des points alignés en des points alignés", i.e. : si $x, y, z \in \mathcal{P}$ sont tels qu'il existe $D \in \mathcal{D}$ avec $x, y, z \in D$, alors il existe $D' \in \mathcal{D}$ avec $f(x), f(y), f(z) \in D'$.

Les propriétés (A1) – (A4) sont les axiomes d'un plan affine. On peut en déduire d'autres propriéetés ; par exemple : si D et D' ne sont pas parallèles, alors $D \cap D'$ contient exactement un élément (car sinon on aurait une contraction avec (A1)).

2.5. Théorème fondamental (cas réel). *Pour une application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *sont équivalentes :*

(1) f *est affine ;*

(2) f *est une collinéation.*

La preuve de l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est très facile, et cette implication vaut pour tout corps $\mathbb{K}$, tandis que la preuve de la réciproque est longue et non-triviale ; de plus, elle ne vaut pas pour tout corps (nous en parlons plus tard dans le cours, voir chapitre 10). L'essentiel pour le moment est de retenir que les applications affines peuvent être caractérisées uniquement par des propriétés d'incidence (i.e., des propriétés d'intersection mutuelle de droites, et de liaison de points par des droites). On constate alors qu'en géométrie affine les droites parallèles jouent un rôle particulier : deux points distincts déterminent toujours une droite, et deux droites déterminent un point d'intersection – sauf si elles sont parallèles ! Si on pouvait se débarrasser de ce rôle exceptionnel, les axiomes (A1) et (A2) prendraient des formes similaires et seraient "duales l'un de l'autre". C'est précisément ce qui sera achevé par la construction du plan projectif, dans lequel deux droites ont toujours un point d'intersection. Il y a deux manières d'effectuer cette construction : l'une est "abstraite" (cf. l'exercice 2.14), l'autre, plus concrète, utilise l'astuce de passer par $\mathbb{K}^3$:

2.6. Définition. Le plan projectif $\mathbb{KP}^2$ est l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathbb{K}^3$: comme avant, on écrit $[P] := D_{0,P} := \{tP | \, t \in \mathbb{K}\}$, et alors

$$\mathbb{KP}^2 = \Big\{ [P] \quad \Big| \, P \in \mathbb{K}^3, P \neq 0 \Big\}.$$

Pour $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, $P \neq 0$, on écrit souvent $[P] := [(x_1, x_2, x_3)] := [x_1 : x_2 : x_3]$. L'application

$$\pi : \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{KP}^2, \quad P \mapsto [P]$$

s'appelle la projection canonique.

2.7. Lemme. *La projection canonique π est surjective, et chaque fibre est en bijection avec $\mathbb{K}^\times$.*

2.8. Exemple. Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinalité q, alors alors la cardinalité de $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ est $q^3 - 1$, celle de $\mathbb{K}^\times$ est $q - 1$, donc celle de $\mathbb{KP}^2$ est $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$.

Pour le lemme suivant, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, faire un dessin en prenant la base canonique :

2.9. Lemme. *Fixons une base b_1, b_2, b_3 de $\mathbb{K}^3$. Les applications*

$$j : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{KP}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto [x_1 b_1 + x_2 b_2 + b_3]$$

$$h : \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^2, \quad [(y_1, y_2)] \mapsto [y_1 b_1 + y_2 b_2]$$

sont bien définies et injectives. Si on les considère comme inclusions, on a une décomposition (en utilisant le lemme 1.7, où $\infty = [b_1]$)

$$\mathbb{KP}^2 = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{KP}^1 = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

2.10. Définition. Une droite de $\mathbb{KP}^2$, ou sous-espace projectif de dimension 1, est une partie de $\mathbb{KP}^2$ de la forme

$$[E] := \pi(E \setminus \{0\}) = \{[P] \mid P \in E, P \neq 0\},$$

où $E \subset \mathbb{K}^3$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

2.11. Lemme. *Si b_1, b_2 est une base du sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{K}^3$, alors*

$$\mathbb{KP}^1 \to [E], \quad [(x_1, x_2)] \mapsto [x_1 b_1 + x_2 b_2]$$

est une bijection. Chaque droite de $\mathbb{KP}^2$ est donc en bijection avec $\mathbb{KP}^1$.

Dans la décomposition $\mathbb{KP}^2 = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{KP}^1$ du lemme 2.9, la partie $\mathbb{KP}^1$ est donc bien une droite de $\mathbb{KP}^2$, dite la droite à l'infini (par rapport à cette décomposition): $E = vect(b_1, b_2)$. Mais, comme dans le chapitre précédent, n'importe quelle droite peut jouer ce rôle (car deux vecteurs libres peuvent toujours être complétés en une base).

2.12. Théorème. *Dans un plan projectif $\mathbb{KP}^2$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(P1) *Deux droites distinctes de $\mathbb{KP}^2$ déterminent un unique point d'intersection.*

(P2) *Deux points distincts de $\mathbb{KP}^2$ déterminent une unique droite qui les relie.*

(P3) *Toute droite de $\mathbb{KP}^2$ contient au moins 3 points.*

(P4) *Il existe au moins 3 points non-colinéaires.*

On remarquera l'analogie formelle entre (P1) et de (P2) : elles sont liées en interchangeant les termes "point" et "droite", resp. "intersection" et "liaison". Cette dualité est un trait profond de la géométrie projective. En géométrie affine, cette dualité n'est pas bien visible, à cause du rôle "exceptionnel" des droites parallèles (cf. ci-dessus).

2.13. Définition. Un plan projectif abstrait est un ensemble $\mathbf{P}$ (de "points") et un ensemble $\mathbf{D}$ de parties de $\mathbf{P}$ (dites des "droites de $\mathbf{P}$") tels que les propriétés (P1) – (P4) sont vérifiées.

Le théorème 2.12 affirme ainsi que $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ est un plan projectif abstrait. Est-ce que tout plan projectif abstrait est de cette forme, pour un certain corps $\mathbb{K}$? La réponse est "non". On peut, par exemple, remplacer le corps $\mathbb{K}$ dans la définition 2.6 par un anneau de division (= corps non-commutatif). L'exemple le plus important est le corps non-commutatif des quaternions $\mathbb{H}$ (vu en Licence ? sinon : voir TD). Mais les contre-exemples ne s'arrêtent pas là : il existe d'autres plans projectifs plus "exotiques", comme le plan octonion $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. C'est un domaine de recherche toujours actif, initié par le fameux texte "Grundlagen der Geometrie" ("Fondations de la géométrie") de David Hilbert (1899), cf.

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Hilbert`.

Voir le chapitre 7 pour d'autres remarques. Un outil fondamental dans cette étude est le lien suivant entre plans affines et plans projectifs abstraits :

2.14. Exercice (droites affines et droites projectives dans $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$). Fixons une décomposition $\mathbb{K}\mathbb{P}^2 = j(\mathbb{K}^2) \cup h(\mathbb{K}/P^1) \cong \mathbb{K}^2 \cup H_\infty$.

(1) Soit $D \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^2$ une droite projective. Montrer qu'alors deux cas se présentent : (a) soit, $D = H_\infty$, (b) soit, $D \neq H_\infty$, alors $|D \cap H_\infty| = 1$, et $D \cap j(\mathbb{K}^2)$ est une droite affine de $\mathbb{K}^2$ (et toute droite affine de $\mathbb{K}^2$ s'obtient ainsi).

(b) Soient D et D' deux droites distincts de $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ du type (b). Alors D et D' sont parallèles dans $\mathbb{K}^2$ si, et seulement si, $D \cap H_\infty = D' \cap H_\infty$. Autrement dit, D et D' ne sont pas parallèles dans $\mathbb{K}^2$ ssi elles n'ont qu'un seul point d'intersection et qui n'est pas sur H_∞.

2.15. Exercice (lien entre plans affines et plans projectifs abstraits).

(1) Montrer que, si $\mathbf{P}$ est un plan projectif abstrait et H une droite de $\mathbf{P}$ qu'on fixe, alors $\mathcal{P} := \mathbf{P} \setminus H$ est un plan affine abstrait. (Indication : on dira que deux droites distincts D, D' de $\mathbf{P}$ sont "parallèles" si leur point d'intersection appartient à H.)

(2) Montrer que, à tout plan affine abstrait, on peut associer, de façon naturelle, un plan projectif abstrait. (Indication : on définit $\mathbf{P} = \mathcal{P} \cup H_\infty$, où un élément de la "droite à l'infini" H_∞ est la classe d'équivalence de toutes les droites de $\mathcal{P}$ parallèles à une certaine droite donnée.)

(3) Montrer que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, les plans affines abstraites ne sont rien d'autre que les plans projectifs abstraits munis d'une droite distinguée.

2.16. Exemple : Le plan de Fano. Le plus petit corps est $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le plan projectif $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ a donc $4 + 2 + 1 = 7$ points. Exercice : compter le nombre de droites. (Indication : compter les droites de type a) et celles de type b); exo 2.14.) Dessin schématique : cf. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Plan_de_Fano`

Finalement, les remarques du chapitre précédent concernant les cas réels et complexes et la topologie valent aussi pour les plans. Dans le cas réel, on a une application surjective et 2 : 1

$$S^2 \to \mathbb{R}\mathbb{P}^2, \quad P \mapsto [P].$$

Dans un sens à préciser plus tard, on peut dire que $\mathbb{RP}^2$ est la même chose que la sphère S^2, où l'on "identifie les points opposés", ou encore c'est un "ruban de Moebius sur le bord duquel on a collé un bonnet". Il n'est pas évident de visualiser cet objet comme une "surface dans $\mathbb{R}^3$".

Chapitre 3 : Introduction aux coniques projectives

3.1. Exercice préliminaire. Soit $C := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, q(x) = 0\}$, avec $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, le cône circulaire.

(1) Montrer que l'intersection de C avec le plan $x_3 = 1$ est un cercle.

(2) Montrer que l'intersection de C avec le plan $x_2 = 1$ est une hyperbole.

(3) Montrer que l'intersection de C avec le plan $x_2 + x_3 = 1$ est une parabole.

(4) Soit E le plan affine $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ax_2 + bx_3 = 1\}$. Déterminer la nature de l'intersection $E \cap C$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: montrer qu'il s'agit d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole, selon le cas. (Utiliser l'équation de E pour éliminer x_2 ou x_3 de l'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ et étudier l'équation quadratique de deux variables restant.)

(5) Du point (4), déduire que *toute* ellipse, hyperbole ou parabole peut être obtenue en intersectant un plan affine avec un cône.

L'exercice justifie d'appeller des ellipses, hyperboles et parabole s des *coniques*. "Par projection", toutes ces figures ont certaines propriétés "projectives" en commun – propriétés étudiées depuis l'antiquité (Appolonius), puis de nouveau grâce au développement des idées générales de la géométrie projective (Pascal, Poncelet,...), voir, pour des remarques historiques, `http://fr.wikipedia.org/wiki/Conique`.

3.2. Définition. Une conique (propre) est l'intersection du cône C avec un plan qui ne passe pas par 0. La conique projective réelle est l'ensemble

$$[C] := \{[x] \in \mathbb{RP}^2 \mid x \in C, x \neq 0\} = \{[x] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, x \neq 0\}$$

(ceci est bien défini car $x \in C$ ssi $\lambda x \in C$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^\times$).

3.3. Visualisation : partie affine, points à l'infini. Pour visualiser la figure géométrique de $[C]$, choisissons une base b_1, b_2, b_3 de $\mathbb{R}^3$ et écrivons $\mathbb{RP}^2 = j(\mathbb{R}^2) \dot\cup h(\mathbb{RP}^1)$ (lemme 2.9), avec la "droite à l'infini" $h(\mathbb{RP}^1) = [E]$, $E = vect(b_1, b_2)$, et identifions $\mathbb{R}^2 \cong j(/R^2) = \{[z_1 b_1 + z_2 b_2 + b_3] | \, z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ (Lemme 2.12 : $\mathbb{KP}^2 = \mathbb{K}^2 \cup H_\infty$). Alors on décompose $[C] = [C]_a \cup [C]_\infty$ avec

(i) $[C]_a := [C] \cap j(\mathbb{K}^2)$ la partie affine de la conique $[C]$: on l'obtient simplement en posant $z_3 = 1$ dans l'équation de C. Autrement dit, on considère l'intersection de C avec le plan affine $E + b_3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) $[C]_\infty := [C] \cap h(\mathbb{KP}^1)$ les points à l'infini de la conique $[C]$: on l'obtient posant $z_3 = 0$.

On choisit (b_1, b_2, b_3), par exemple :

a) base (e_1, e_2, e_3) : partie affine : on pose $x_3 = 1$, l'équation $q(x) = 0$ devient $x_1^2+x_2^2 = 1$, l'équation d'un cercle. Points à l'infini : $x_3 = 0$: $q(x) = 0$ n'a aucune solution non-triviale, il n'y a aucun point à l'infini.

b) base (e_1, e_3, e_2) : partie affine : on pose $x_2 = 1$, l'équation $q(x) = 0$ devient $x_3^2-x_2^2 = 1$, l' équation d'une hyperbole. Points à l'infini : $x_2 = 0$: $q(x) = 0$ devient $x_1^2-x_3^2 = 0$; toute solution x est multiple de $(1, 0, 1)$ ou de $(1, 0, -1)$; il y a ainsi deux points à l'infini.

c) base (e_1+e_3, e_2, e_1-e_3) ; alors $q(z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3) = q(z_1+z_3, z_2, z_1-z_3) = 4z_1z_3+z_2^2$. Pour $z_3 = 1$ on obtient la partie affine : $4z_1 = z_2^2$ (parabole) ; pour $z_3 = 0$ on obtient $z_2^2 = 0$, donc $z_2 = 0$, $z_1 \in \mathbb{R}$: il y a un seul point à l'infini, à savoir $[b_1] = [e_1 + e_3] = [(1, 0, 1)]$.

Résumée : le cercle est une image affine complète de la conique $[C]$: la droite à l'infini ne l'intersecte pas ; si elle l'intersecte en deux points, l'image affine est une hyperbole ; si elle le touche en un point (forcément de façon "tangentielle"), l'image affine est une parabole. L'objet "conique projective" est le même dans les trois cas, seulement la droite à l'infini change de position !

3.4. Rappel : formes quadratiques. Passons au cas d'un corps quelconque $\mathbb{K}$ (de caractéristique $\neq 2$). Rappelons qu'une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ est une application $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ de la forme

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^tAx$$

avec une matrice A qu'on peut supposer symétrique. La forme bilinéaire associée est

$$\beta(x, y) = x^tAy.$$

On dit que q et β sont non-dégénérées si $\det(A) \neq 0$. Un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ est dit isotrope si $q(x) = 0$. L'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{K}^n \mid q(x) = 0\}$$

des vecteurs isotropes est homogène dans le sens que $x \in C$ ssi $\lambda x \in C$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.

3.5. Définition. Une conique projective est une partie $[C] \subset \mathbb{KP}^2$ de la forme

$$[C] := \{[x] \in \mathbb{KP}^2 \mid q(x) = 0, x \neq 0\},$$

où $q : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique. Elle est dite propre si q est non-dégénérée.

3.6. Exemple. Soit $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la conique $[C]$ est vide (car le seul vecteur isotrope est 0). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la conique $[C]$ est non-vide : par exemple, $[(0, i, 1)], [(0, -i, 1)] \in [C]$ (l'image affine pour $x_3 = 1$ est $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = -1\}$).

3.7. Classification : cas réels et complexes. On sait qu'il existe toujours des bases orthogonales pour une forme quadratique : quitte à changer de base dans $\mathbb{K}^3$, on peut supposer que A est une matrice diagonale, i.e.,

$$q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2.$$

On sait aussi : si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut encore se ramener aux cas $a_i = 1$ ou $a_i = 0$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, aux cas $a_i \in \{0, 1, -1\}$. Le nombre d'éléments non-nuls est le rang de la forme quadratique, et dans le cas réel, la signature est un autre invariant qui compte le nombre des coéfficients positifs, resp. négatifs. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a donc 3 cas, selon le rang :

rang 1

$q(x) = x_1^2$: $[C] = [vect(e_2, e_3)]$ est une droite projective

rang 2

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$, d'où $\{x \mid q(x) = 0\} = \{(x_1, ix_2, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{C}\} \cup \{(x_1, -ix_2, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{C}\}$, et donc $[C] = [vect(e_1+ie_2, e_3)] \cup [vect(e_1-ie_2, e_3)]$ est la réunion de deux droites projectives qui se coupent au point $[e_3]$

rang 3

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$: la conique complexe propre : cf. l'exemple ci-dessus !

Dans la cas réel il faut aussi distinguer selon la signature, il y a donc plus de cas :

rang 1

$q(x) = x_1^2$: $[C] = [vect(e_2, e_3)]$ est une droite projective

$q(x) = -x_1^2$: même chose

rang 2

$q(x) = x_1^2 + x_2^2$: $[C] = [e_3]$ un seul point

$q(x) = -x_1^2 - x_2^2$: $[C] = [e_3]$ un seul point

$q(x) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$: $[C]$ réunion de deux droites qui se coupent au point $[e_3]$

rang 3

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$: aucune solution non-triviale : $[C] = \emptyset$

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^3$: la conique propre réelle, cf. ci-dessus.

3.8. Coniques propres pour $\mathbb{K}$ quelconque. Soit $\beta(x, y) = x^t Ay$ avec A symétrique telle que $\det(A) \neq 0$, et $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $x \mapsto q(x) = \beta(x, x)$. Supposons qu'il existe un vecteur isotrope $v \neq 0$: $\beta(v, v) \neq 0$. Comme $\det(A) \neq 0$, il existe un autre vecteur w tel que $\beta(v, w) \neq 0$. On trouve alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u := w + \lambda v$ satisfait $\beta(u, u) = 0$ et $\beta(u, v) = \beta(w, v) \neq 0$, et en renormalisant u ou v, on a ainsi démontré :

3.9 Lemme. *Soit β une forme bilinéaire symétrique non-dégénéré sur $\mathbb{K}^2$ admettant un vecteur isotrope non-nul. Alors il existe une base b_1, b_2 de $\mathbb{K}^2$ par rapport à laquelle*

$$\beta(rb_1 + sb_2, r'b_1 + s'b_2) = rs' + sr', \qquad \textit{matrice p.r. à cette base :} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\mathbb{K}^2$ muni d'une telle forme s'appelle un plan hyperbolique).

Comme $q(rb_1 + sb_2) = 2rs$, il y a donc (à un scalaire près) exactement deux vecteurs isotropes : b_1 et b_2 (faire un dessin du cas réel !). Soit maintenant $n = 3$: on commence par choisir des vecteurs v et w, puis b_1 et b_2 comme ci-dessus. La matrice de β, restreinte à $E := vect(b_1, b_2)$, est comme dans le lemme ; son déterminant est -1, ainsi on sait (cours d'algèbre) que $\mathbb{K}^3 = E \oplus E^\perp$. Comme $\dim E^\perp = 1$, on choisit un vecteur b_3 de base dans $E^\perp$, et alors la matrice de β p.r. à b_1, b_2, b_3 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec $\mu = \beta(b_3, b_3) \neq 0$. En remplaçant b_1 par μb_1, on obtient alors :

3.10. Lemme. *Soit $[C]$ une conique propre non-vide sur $\mathbb{KP}^2$. Alors il existe une base b_1, b_2, b_3 de $\mathbb{K}^3$ par rapport à laquelle*

$$[C] = \{[rb_1 + sb_2 + tb_3] \in \mathbb{KP}^2 \mid 2rs + t^2 = 0\}\,.$$

En particulier, quitte à un changement de base, il n'existe qu'un seul type : on parle de "la" conique propre non-vide sur $\mathbb{KP}^2$.

La conique propre non-vide a énormement de propriétés intéressantes. À titre d'exemple, voici un résultat de nature typiquement "projective" que nous allons démontrer plus tard dans le cours (faire un dessin) :

3.11. Un théorème de Pascal. *Soient a, b, c, a', b', c' les sommets d'un hexagone insrcit dans une conique. Alors les points d'intersection des cotés opposés sont alignés.*

Chapitre 4 : Les espaces projectifs $\mathbb{KP}^n$

Dans ce chapitre et les deux suivants, nous introduisons le langage général des espaces projectifs de dimension n. La notion la plus importante, pas encore mentionnée dans les chapitres introductoires, est celle du *groupe projectif.*

4.1. Définition. Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}V$, est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension 1 :

$$\mathbb{P}V = \Big\{ D_{0,v} := \{tv | \, t \in \mathbb{K}\} \quad \Big| v \in V \setminus \{0\} \Big\}.$$

Pour $v \in V \setminus \{0\}$, on écrit souvent $[v] := D_{0,v} = \mathbb{K} \cdot P$. L'application

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}V, \quad v \mapsto [v]$$

s'appelle la projection canonique. Par définition, la dimension de $\mathbb{P}V$ est $\dim V - 1$. Si $V = \mathbb{K}^{n+1}$, on écrit aussi $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) =: \mathbb{KP}^n$. (Remarque : la définition vaut aussi pour le cas où la dimension de V est infinie. Dans ce cours, nous supposons, sauf mention exprès du contraire, que $\dim V = n + 1$ est finie.)

4.2. Lemme. *Soient $v, w \in V \setminus \{0\}$. On a $\pi(v) = \pi(w)$ si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{K}^\times$ tel que $w = rv$. La relation $\sim$ définie sur $V \setminus \{0\}$ par : $v \sim w$ si "existe $r \in \mathbb{K}^\times$ tel que $w = rv$", est une relation d'équivalence, et $\mathbb{P}V$ s'identifie canoniquement avec les classes d'équivalence de cette relation.*

Exercice. Montrer que, si $|\mathbb{K}| = q$ et $n = \dim \mathbb{P}V$, alors $|\mathbb{P}V| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

4.3. Définition. Un sous-espace projectif de dimension k dans $\mathbb{P}V$ est une partie de $\mathbb{P}V$ de la forme

$$[E] := \pi(E \setminus \{0\}) = \big\{[P] \mid \, P \in E \setminus \{0\}\big\},$$

où $E \subset V$ est un sous-espace vectoriel de dimension $k + 1$. Un sous-espace de dimension 0 se confond avec un point de $\mathbb{P}V$., un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{P}V$ est une droite (projective), un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{P}V$ est un plan (projectif), etc. Un hyperplan (projectif) est un sous-espace projectif de dimension $\dim V - 1$.

4.4. Lemme. *Si $b_1, \ldots, b_{k+1}$ est une base du sous-espace vectoriel $E \subset V$, alors*

$$\mathbb{KP}^k \to [E], \quad [(x_1, \ldots, x_{k+1})] \mapsto [x_1 b_1 + \ldots + x_{k+1} b_{k+1}]$$

est une bijection. Chaque sous-espace de dimension k est donc en bijection avec $\mathbb{KP}^k$.

4.5. Théorème.

(i) L'intersection de plusieurs sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif.

(ii) Pour toute partie $S \subset \mathbb{P}V$, l'intersection de tout les sous-espaces contenant S est un sous-espace, et c'est le plus petit sous-espace contenant S. On le note $\langle S \rangle$.

Comme dans le cas vectoriel, on dit alors : l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}V$, muni des deux opérations

$$[E] \wedge [F] := [E] \cap [F], \qquad [E] \vee [F] := \langle [E] \cup [F] \rangle$$

est un treillis. Noter que $[E] \cap [F] = [E \cap F]$ et $[E] \vee [F] = [E + F]$.

4.6. Théorème. *Pour des sous-espaces projectifs $[E]$, $[F]$ de $\mathbb{P}V$,*

$$\dim([E] \wedge [F]) + \dim([E] \vee [F]) = \dim E + \dim F$$

Exercice. Une droite et un hyperplan ont, soit un unique point d'intersection, soit que la droite appartient entièrement à l'hyperplan. Comparer avec la situation dans un espace affine !

4.7. Définition. Un repère projectif dans un espace projectif $\mathbb{P}V$ de dimension n est la donnée de $n+2$ points $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ de $\mathbb{P}V$ tels que : il existe une base $b_1, \ldots, b_{n+1}$ de V telle que

$$\forall i = 1, \ldots, n+1 : \quad p_i = [b_i], \qquad p_0 = [b_1 + \ldots + b_{n+1}] \, .$$

(Noter que les b_i ne sont pas déterminés par cette condition, mais la condition sur p_0 assure que, si on les change par un facteur scalaire, ce facteur scalaire doit être *commun* pour tout les b_i.) Si $V = \mathbb{K}^{n+1}$ et $b_i = e_i$ la base canonique, le repère ainsi obtenu s'appelle le repère canonique de $\mathbb{KP}^n$.

Le point p_0 semble jouer un rôle particulier dans cette définition. Mais le résultat suivant montre que n'importe quelle permutation de ces $n+2$ points est également un repère :

4.8. Proposition. *Pour $n+2$ points $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ de $\mathbb{P}V$ sont équivalents :*

(1) *$p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ est un repère ;*

(2) *$n+1$ quelconques des points $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ ne sont pas dans un hyperplan.*

4.9. Corollaire. *Trois points dans $\mathbb{KP}^1$ forment un repère projectif, si, et seulement si, elles sont deux à deux distincts.*

Pour le repère canonique de $\mathbb{KP}^1$, on utilise aussi la notation

$$\infty = [e_1], \quad 0 = [e_2], \quad 1 = [e_1 + e_2] \, .$$

Chapitre 5 : Le groupe projectif

Après avoir défini les "objets" de notre étude (les espaces projectifs $\mathbb{P}V$), nous devons expliquer la notion de "morphisme", les "applications" ou "flèches" entre deux espaces projectifs $X = \mathbb{P}V$ et $X' = \mathbb{P}V'$. L'idée est de partir d'un morphisme $f : V \to V'$, i.e., d'une application linéaire, puis de définir $X \to X'$, $[v] \mapsto [f(v)]$. Mais, est-ce bien défini? D'abord, si $v \sim w$, i.e., $w = \lambda v$, on a bien $f(v) = \lambda f(w)$, donc $f(v) \sim f(w)$. Mais il faut aussi que $f(v) \neq 0$ si $v \neq 0$, et ceci peut être en défaut. Pour éviter ce problème, on suppose que f est *injective*, ou, mieux encore, *bijective.*

5.1. Définition. Une homographie, ou application projective $F : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V'$ est une application telle qu'il existe une application linéaire et bijective $f : V \to V'$ telle que, pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, $F([v]) = [f(v)]$. On note alors $F = [f]$, ou encore $F = \mathbb{P}f$.

5.2. Lemme. *On a* $[g \circ f] = [g] \circ [f]$ *et* $[\mathrm{id}_V] = \mathrm{id}_{\mathbb{P}V}$*, et les homographies de* $\mathbb{P}V$ *forment un groupe, dit le groupe projectif de* V*, noté*

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) = \{[f] \mid f \in \mathrm{GL}(V)\}.$$

On écrit aussi $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$.

5.3. Lemme. *On a* $[f] = [g]$ *ssi il existe* $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ *tel que* $g = \lambda f$*. Ainisi l'application*

$$\mathrm{GL}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GL}(V), \quad g \mapsto [g]$$

est un homomorphisme surjectif, et son noyau est le groupe $\mathbb{K}^\times \mathrm{id}$ *des multiples de l'identité de* V*. Par conséquent,*

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(V)/(\mathbb{K}^\times \mathrm{id})\,.$$

5.4. Exercice. L'application $\mathrm{SL}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$, $g \mapsto [g]$, est-elle surjective ? injective ? Rappel : $\mathrm{SL}(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) | \det(g) = 1\}$. Indication : regarder d'abord le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et distinguer les cas $\dim V$ paire, resp. impaire.

5.5. Exercice. Soit $[g] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ et $v \in V \setminus \{0\}$. Montrer que $[v]$ est un point fixe de $[g]$ ssi v est un vecteur propre de g. Si $\dim \mathbb{P}V = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $[g]$ a, soit 0, 1, 2 ou une infinité de points fixes et que, dans le dernier cas, $[g] = \mathrm{id}$.

5.6. Lemme. *Si* $[E]$ *est un sous-espace projectif de dimension* k *et* $[g] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$*, alors* $[g]([E]) = [g(E)]$ *est un sous-espace projectif de dimension* k*. En particulier,* $[g]$ *est une collinéation :*

5.7. Définition. *Une collinéation est une application* $f : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V'$ *telle que, si* p_i*,* $i = 1, 2, 3$ *sont trois points alignés, alors* $f(p_i)$*,* $i = 1, 2, 3$*, sont également alignés.*

Exemple/exercice. Toute homographie est une collinéation. Que dire de la réciproque ? On dimension 1, toute application est une collinéation, donc la réciproque est alors fausse. Mais même en dimension $n > 1$, il existe des collinéations qui ne sont pas des homographies: montrer que l'application $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$, $[z] \mapsto [\overline{z}]$ (conjugaison complexe en chaque composante) est bien définie, qu'elle est une collinéation, mais non une homographie.

5.8. Théorème ("Premier théorème fondamental de la géométrie projective"). *Le groupe projectif* $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ *agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères projectifs, i.e.: soient* $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ *et* $(q_0, \ldots, q_{n+1})$ *deux repères projectifs de* $\mathbb{P}V$ *; alors il existe un unique élément* $[g] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ *tel que* $[g](p_i) = q_i$ *pour* $i = 0, \ldots, n+1$.

Ce théorème est une façon d'exprimer le fait que le groupe projectif est "gros" : il agit simplement transitivement sur certaines $n+2$-uplets (les repères). En géométrie affine, le groupe affine agit simplement transitivement sur certaines $n+1$-uplets (les repères affines), et algèbre linéaire, le groupe linéaire agit simplement transitivement sur certaines n-uplets (les bases). Ainsi le groupe affine est "plus gros" que le groupe linéaire, et le groupe projectif est "plus gros" que le groupe affine.

5.9. Corollaire. *Soit $\mathbb{P}V$ une droite projective ($n = \dim V - 1 = 1$). Alors le groupe projectif agit simplement transitivement sur les triplets d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{KP}^1$: si (a, b, c) et (a', b', c') sont deux triplets d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{KP}^1$, il existe une unique application projective $f = f^{abc}_{a'b'c'} \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ telle que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$.*

5.10. Corollaire. *Le groupe projectif agit transitivement sur l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbb{P}V)^2$ tels que $x \neq y$.*

5.11. Théorème. *Le groupe projectif $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathbb{KP}^n$, i.e., pour toute paire $(x, y) \in (\mathbb{KP}^n)^2$, il existe $[g] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K})$ tel que $[g]([x]) = [y]$. Prenons $x_0 := [e_1]$ comme point de base dans $\mathbb{KP}^n$. Alors le groupe stabilisateur de x_0 est, sous forme matricielle,*

$$P = \mathbb{P}(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{K}^\times, b \in \mathbb{K}^n, c \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\right\});$$

et on peut identifier ainsi $\mathbb{KP}^n$ avec l'espace homogène $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n + 1; \mathbb{K})/P$.

5.12. Définition. Soit $\mathbf{P} = \mathbb{KP}^2$ (ou un plan projectif abstrait), D et D' deux droites de $\mathbf{P}$ et $c \notin (D \cup D')$. La perspective de D sur D', de centre c, est l'application $f_c : D \to D'$ définie par : soit $x \in D$, alors $f_c(x) = D' \cap (c \vee x)$ est l'unique point d'intersection des deux droites D' et $c \vee x$.

5.13. Théorème. *La perspective f_c est une homographie de D sur D'. En particulier, toute perspective est uniquement déterminée par son effet sur trois points deux à deux distincts.*

Chapitre 6 : Cartes, liaison affine-projectif et dualité

Le lemme suivant, ainsi que sa preuve, sont l'analogue du lemme 2.9 :

6.1. Lemme. *Soit $\mathbb{P}V$ un espace projectif de dimension n et $b_1, \ldots, b_{n+1}$ une base dans V. Alors les applications*

$$\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{P}V, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n + b_{n+1}]$$

$$h : \mathbb{KP}^{n-1} \to \mathbb{P}V, \quad [(x_1, \ldots, x_n)] \mapsto [x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n]$$

sont injectives, et on a $\mathbb{P}V = \phi(\mathbb{K}^n) \,\dot\cup\, h(\mathbb{KP}^{n-1})$.

Si la base est fixée, on pourra aussi écrire, tout court : $\mathbb{P}V = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{KP}^{n-1}$. Par récurrence, on a alors une décomposition disjointe

$$\mathbb{KP}^n = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \ldots \cup \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

On appelle $\phi(\mathbb{K}^n) = \{[\sum_j x_j b_j] \mid x_{n+1} \neq 0\}$ la *partie affine* et $h(\mathbb{KP}^{n-1}) = \{[\sum_j x_j b_j] \mid x_{n+1} = 0\}$ l'*hyperplan à l'infini*, pour ce choix de base. On peut maintenant faire la même construction, en échangeant le vecteur b_{n+1} avec un autre vecteur de base b_i pour un i fixé : on appelle une carte canonique de $\mathbb{P}V$ la partie

$$U_i = \{[\sum_{j=1}^{n+1} x_j b_j] \in \mathbb{KP}^n | \, x_i \neq 0\},$$

ou, plus précisément, l'isomorphismes d'espaces affines $\phi_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ donné par

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & \hat{x}_i & x_{i+1} & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto [x_1 b_1 + \ldots + x_{i-1} b_{i-1} + b_i + x_{i+1} b_{i+1} + \ldots + x_{n+1} b_{n+1}]$$

(où le signe ˆ au-dessus d'une lettre signifie que cette variable est à supprimer). L'application inverse supprime la variable i et divise les autres composantes par x_i. Noter que $\mathbb{P}V = \cup_{i=1}^{n+1} U_i$ (car si $x \neq 0$, alors $x_i \neq 0$ pour au moins un index i), et que les intersections $U_{ij} = U_i \cap U_j$ sont non-vides. Si $i \neq j$, nous avons la formule de changement de cartes suivante : $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ envoit $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & \hat{x}_i & x_{i+1} & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}$ (avec $x_j \neq 0$) sur

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_j} & \dots & \hat{x}_j & \dots & \frac{1}{x_j} & \dots & \frac{x_{n+1}}{x_j} \end{pmatrix}$$

(où $\frac{1}{x_j}$ se trouve en i-ème position). Par exemple, si $n = 1$, il n'y a que deux cartes affines canoniques, et les deux changements de cartes sont donnés par

$$\mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto \frac{1}{t}.$$

Si $n = 2$, il y a trois cartes affines canoniques, avec changement de cartes typiques

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3} & \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix}.$$

6.2. Remarque. Les cartes U_i forment un recouvrement de $X = \mathbb{P}V$. On montrera plus tard que (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) X les U_i sont en fait des ouverts par rapport à une topologie naturelle de X : on parle alors d'un recouvrement ouvert. On constate que les formules de changement de carte sont rationnelles, donc, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les applications $\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i$ sont différentiables. On dira alors que les espaces projectifs $X = \mathbb{KP}^n$ sont des variétés différentiables avec atlas $(U_i, \phi_i)_{i=1,\ldots,n+1}$. Dans cette perspective, on s'intéresse à des "formules locales", i.e., des formules qui décrivent des structures localement, dans une carte. Par exemple, on peut décrire les homographies dans une carte:

6.3. Théorème. *Soit $f := [g] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ et écrivons $g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ sous forme de matrice en blocs,*

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ \gamma & d \end{pmatrix}, \qquad A \in M(n, n; \mathbb{K}),\ B \in M(n, 1; \mathbb{K}),\ \gamma \in M(1, n; \mathbb{K}),\ d \in \mathbb{K}.$$

Identifions $\mathbb{K}^n$ (vecteurs colonnes) avec U_{n+1} via la carte canonique ϕ_{n+1} et γ (vecteur ligne) avec une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Soit $z \in \mathbb{K}^n = U_{n+1}$. Alors sont équivalents :

(1) *l'image $f(z)$ de z est "fini", i.e., elle appartient encore à U_{n+1},*

(2) $\gamma(z) + d \neq 0$.

Alors l'effet de f dans la carte canonique U_{n+1} est donné par la formule

$$f(z) = (\gamma(z) + d)^{-1}\big(Az + B\big).$$

Cas particulier : $n = 1$. Dans ce cas, g est une matrice 2×2 (et $c := \gamma$, etc., sont simplement des scalaires), et son action sur $\mathbb{K}$ est par applications fractionnelles rationnelles, le cas le plus élémentaire d'homographies, bien connu, par exemple, en analyse complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dans ce cas, la négation de (1) est : $f(z) = \infty$, et celle de (2) est : $cz + d = 0$. On peut donc interpréter, dans ce cas, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \infty$.

Exemples.
(A) Soit $g = g_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda 1_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où 1_n désigne la matrice unitée $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Alors $f(z) = \lambda z$ agit par une homothétie (de rapport λ) sur $\mathbb{K}^n = U_{n+1}$. Noter que l'effet de la matrice $g' := \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{P}V$ est le même : $[g'] = [g] = f$. Noter aussi que $\det g = \lambda^n$ et que $\det(g') = \lambda^{-1}$ et que $g_\lambda g_\mu = g_{\lambda\mu}$, $g_1 = \mathrm{id}$.
(B) Soit $g = g_B := \begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où B est un vecteur colonne. Alors $f(z) = z + B$, donc f agit par une translation de l'espace affine U_{n+1} (en direction B). Noter que $\det g = 1$ et que $g_B g_C = g_{B+C}$, $g_0 = \mathrm{id}$.
Pour traiter (A) et (B) ensemble, posons $g = g_{r,B} := \begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$, alors $f(z) = rz + B$. Noter aussi que, pour $i = 1, \ldots, n$, on a alors $f([e_i]) = [e_i]$, i.e., l'hyperplan à l'infini, $H_{n+1} = [\ker \mathrm{pr}_{n+1}]$, est fixé *point par point*. Géométriquement, cela correspond au fait que l'image d'une droite D par une translation ou homothétie est toujours une droite *parallèle à* D.
(C) Soit $g = g_\gamma := \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ où γ est une matrice ligne (forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$). Alors $f(z) = \frac{1}{\gamma(z)+1} z$. Cette application fixe l'origine 0 de $\mathbb{K}^n$: $f(0) = 0$, i.e., $[g]([e_{n+1}]) = [e_{n+1}]$. Ce n'est pas une application affine de $\mathbb{K}^n$. Parfois on l'appelle une quasi-inversion. Noter que $g_\gamma g_\beta = g_{\gamma+\beta}$, $g_0 = \mathrm{id}$.

Revenons maintenant au fait que *tout* hyperplan peut jour le rôle d'un "hyperplan à l'infini". Rappelons d'abord que $E \subset V$ est un hyperplan vectoriel ssi il existe une forme linéaire non-nulle $\alpha : V \to \mathbb{K}$ telle que $E = \ker(\alpha)$.

6.4. Lemme. *Soit $E \subset V$ un hyperplan et α une forme linéaire telle que $E = \ker(\alpha)$. Alors α est déterminée à un facteur non-nul près.*

6.5. Définition. Soit $X = \mathbb{P}V$ un espace projectif. Son espace projectif dual est l'espace projectif $X' := \mathbb{P}(V^*)$, où $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel dual de V (l'espace des formes linéaires sur V). D'après le lemme, $[\alpha] \mapsto [\ker \alpha]$ définit une bijection entre X' et l'ensemble des hyperplans de X. Nous dirons qu'un couple $([v], [\alpha]) \in X \times X'$ est incident si $\alpha(v) = 0$ (autrement dit, si $[v]$ appartient à l'hyperplan $[\ker \alpha]$), et transverse ou non-incident sinon. Rappelons aussi que $\dim V = \dim V^*$, donc $\dim X = \dim X'$.

6.6. Théorème. *Soit $X = \mathbb{P}V$ un espace projectif et $H = [\ker \alpha]$ un hyperplan de X. Alors $U_H := U_\alpha := X \setminus H$ porte une structure naturelle d'espace affine.*

Il est intéressant de donner et de comparer plusieurs preuves de ce résultat : une preuve directe consiste à remarquer que

$$A_\alpha = \alpha^{-1}(1) = \{v \in V \mid \alpha(v) = 1\}$$

est un espace affine et que

$$A_\alpha \to U_\alpha, \quad x \mapsto [x]$$

est une bijection, qu'on peut utiliser pour définir sur U_α une structure d'espace affine. On montre alors que cette structure ne change pas si on remplace α par un multiple de α.

Une autre preuve part de la remarque suivante : *Le couple* $([v],[\alpha])$ *est transverse ssi*

$$V = \mathbb{K}v \oplus \ker(\alpha)\,.$$

Ainsi le théorème est le cas particulier $E = \ker(\alpha)$ du résultat plus général suivant : *Soit* $E \subset V$ *un sous-espace vectoriel quelconque. Alors l'ensemble*

$$S_E := \{F \text{ sous-espace vectoriel de } V \mid V = E \oplus F\}$$

des supplémentaires de E porte une structure naturelle d'espace affine, dont l'espace vectoriel de translations est $\mathrm{Hom}(V/E, E)$. Exercice : prouver ce résultat (ou revoir sa preuve).

6.7. Théorème. *Soit U un espace affine quelconque sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un espace projectif X_U, muni d'un hyperplan H, tel que U soit isomorphe à la partie affine $X_U \setminus H$.*

Une preuve simple procède par le choix d'une origine o dans U, i.e., on considère U comme espace vectoriel, et on pose $V = U \oplus \mathbb{K}$ et $\alpha : V \to \mathbb{K}$, $\alpha((u,r)) = r$. Alors U est isomorphe à l'hyperplan affine $\{(u,1) | u \in U\}$ de V.

Cependant, cette preuve n'est pas très satisfaisante : la construction semble dépendre du choix arbitraire d'une origine dans U. Exercice : trouver une construction "intrensèque", i.e., sans faire appel à une origine dans U. Autrement dit, trouver la construction d'un espace vectoriel de dimension $\dim U + 1$ et naturellelement associé à un espace affine, et muni d'une forme linéaire naturelle. Littérature : [Berger, vol. 1, Chap. 5].

Les deux théorèmes (6.6 et 6.7) ensemble affirment donc qu'*il existe une bijection naturelle entre (la catégorie des) espaces affines et (la catégorie des) espaces projectifs munis d'un hyperplan distingué ("hyperplan à l'infini").* Cette correspondence bijective est parfois appelée la liaison affine-projective.

Chapitre 7 : Quelques théorèmes classiques : Pappus, Desargues,...

Les résultats de ce chapitre sont des théorèmes d'incidence classiques, i.e., des théorèmes traitant de configurations de droites et de leurs intersections. Notation : $a \vee b$ ou (ab) la droite qui rejoint deux points a, b ; $D \wedge D'$ ou $D \cap D'$ l'intersection de deux sous-espaces projectifs D et D' (de droites, par exemple). Un triangle propre (resp. hexagon propre) est la donnée de 3 (resp. 6) points deux à deux distincts, etc.

7.1. Théorème de Pappus. *Soient D etD' deux droites distincts dans le plan projectif $\mathbb{KP}^2$, et soient $a, b, c \in D$, $a', b', c' \in D'$, deux à deux distincts. Alors les trois points d'intersection u, v, w suivants sont alignés :*

$$u := (b \vee c') \wedge (b' \vee c), \qquad v := (c \vee a') \wedge (c' \vee a), \qquad w := (a \vee b') \wedge (a' \vee b)\,.$$

Une autre façon d'énoncer ce théorème est : *Soit (a, b', c, a', b, c') un hexagon propre dont les sommets se trouvent à tour de rôle sur deux droites distincts D et D'. Soient u, v, w les points d'intersection de cotés opposés de cet hexagone. Alors, u, v, w sont alignés.* Faire un dessin ! Pour la preuve, il y a deux stratégies possibles, opposées en un certain sens :

(A) Choisir de façon appropriée une "droite à l'infini" H, et se ramener ainsi à un énoncé et à une preuve "affines" dans l'espace affine $\mathbb{KP}^2 \setminus H$. Dans notre cas : on pourra choisir la droite $u \vee v$ comme droite à l'infini. Cela veut dire que, dans l'espace affine, $(b \vee c') \parallel (b' \vee c)$ et $(c \vee a') \parallel (c' \vee a)$. Dire que w appartient aussi à H revient à dire que l'on a aussi $(a \vee b') \parallel (a' \vee b)$. Or, ceci est le théorème classique de Pappus en géométrie affine (vu en Licence). Exercice : revoir sa preuve (elle repose sur le théorème de Thales)!

(B) Donner une preuve "intrensèquement projective", ce qui redemontre en même temps, via (A), le théorème classique affine. Dans notre cas : on se sert du théorème 5.13 sur les *perspectives.* On considère les trois perspectives $f_a : D' \to a' \vee b$ et $f_c : b \vee c' \to D'$ et $f_v : b \vee c' \to a' \vee b$. On montre que $f_a \circ f_c$ et f_v ont même effet sur trois points distincts; d'après 5.13, il s'ensuit donc que $f_a \circ f_c = f_v$. On en déduit que $f_v(u) = f_a \circ f_c(u) = f_a(b') = w$, donc w se trouve sur la droite $u \vee v$.

7.2. Théorème de Brianchon. *Soient d et d' deux points distincts du plan projectif $\mathbb{KP}^2$ et soient A, B, C trois droites passant par d et A', B', C' trois droites passant par d', deux à deux distincts. Alors les trois droites U, V, W suivants sont concourantes :*

$$U := (B \wedge C') \vee (B' \wedge C), \qquad V = (C \wedge A') \vee (C' \wedge A), \qquad W := (A \wedge b') \vee (A' \wedge B)\,.$$

Comparons avec l'énoncé du théorème de Pappus : on obtient Brianchon si on remplace dans Pappus le terme "point" par "droite" et inversement, le signe $\vee$ par $\wedge$ et des termes "passe par" par "se trouve sur", etc. De cette façon, chaque théorème d'incidence admet un théorème dual ou théorème correlatif.

7.3. Méta-théorème. *Un théorème d'incidence (T) est valable pour tout espace projectif $\mathbb{P}V$ de dimension n sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, son théorème correlatif (T') est valable pour tout espace projectif de dimension n sur $\mathbb{K}$, où (T') est l'énoncé obtenu en remplaçant dans (T) le terme "point" par "hyperplan", "sous-espace projectif de dimension k" par "sous-espace projectif de dimension $n-k$", le signe $\vee$ par $\wedge$ et le signe $\wedge$ par $\vee$.*

La preuve consiste en l'observation que le théorème (T), énoncé pour $X = \mathbb{P}V$, peut être "lu" dans l'espace projectif dual $X' = \mathbb{P}(V^*)$: un hyperplan dans $\mathbb{P}V$ est la même chose qu'un "point" dans $\mathbb{P}V^*$ (Théorème 6.2), et un point de $\mathbb{P}V$ correspond à un hyperplan $\{[\alpha] \in X' \mid \alpha(v) = 0\}$ de X'. Plus précisément, rappellons le fait connu d'algèbre linéaire:

7.4. Lemme. *Soit V un espace vectoriel de dimension $m = n + 1$ sur $\mathbb{K}$. Pour un sous-espace vectoriel $E \subset V$ soit*

$$F_E := \{\alpha \in V^* \mid \forall e \in E : \alpha(e) = 0\},$$

et pour un sous-espace vectoriel $F \subset V^*$ soit

$$E_F := \{v \in V \mid \forall \alpha \in F : \alpha(v) = 0\}\,.$$

Alors $E \mapsto F_E$ est une bijection de l'ensemble $\mathrm{Gras}_k(V)$ des sous-espaces de dimension k de V (la Grassmannienne des k-espaces dans V) sur l'ensemble $\mathrm{Gras}_{m-k}(V^*)$ des sous-espaces de dimension $m-k$ de V^*, avec application réciproque $F \mapsto E_F$. Ces bijections *renversent les inclusions et échangent les opérations $\wedge$ (intersection) et $\vee$ (somme de sous-espaces), i.e.,*

$$F_{E_1} \cap F_{E_2} = F_{E_1+E_2}, \qquad F_{E_1} + F_{E_2} = F_{E_1 \cap E_2}.$$

7.5. Théorème de Desargues. *Soient (abc) et $(a'b'c')$ deux triangles propres dans le plan projectif $\mathbb{KP}^2$, ayant sommets et cotés distincts. Soient $A = b \vee c$, $B = a \vee c$, $C = a \vee b$ les cotés de (abc) et $A' = b' \vee c'$, $B' = a' \vee c'$, $C' = a' \vee b'$ les cotés de $(a'b'c')$. Si les droites $a \vee a'$ et $b \vee b'$ et $c \vee c'$ sont concourantes, alors les points $A \wedge A'$ et $B \wedge B'$ et $C \wedge C'$ sont alignés.*

Concernant la preuve, les mêmes remarques comme pour la preuve du théorème de Pappus s'appliquent. Le théorème correlatif (D') du théorème de Desargues (D) s'énonce : *si les points $A \wedge A'$ et $B \wedge B'$ et $C \wedge C'$ sont alignés, alors les droites $a \vee a'$ et $b \vee b'$ et $c \vee c'$ sont concourantes.* Ainsi, (D') est la réciproque de (D). Ainsi on peut énoncer le théorème de Desargues en remplaçant le "si... alors..." par "...si et seulement si...".

7.6. Théorème de la polaire. *Soient A et B deux droites distincts dans le plan projectif $\mathbb{KP}^2$ et $a, a', a'' \in A$, $b, b', b'' \in B$ deux à deux distincts tels que les droites $a \vee b$, $a' \vee b'$ et $a'' \vee b''$ soient concourantes en d. Alors les points o, u, v suivants sont colinéaires :*

$$o := A \wedge B, \quad u := (a \vee b') \wedge (b \wedge a'), \quad v := (a' \vee b'') \wedge (b' \vee a'')$$

Concernant les dessins et les preuves, les remarques faites ci-dessus s'appliquent ! Dualiser aussi le théorème de la polaire.

Lien des théorèmes de Pappus et de Desargues avec les "fondations de la géométrie"

Pendant plus de deux mille ans, les "Éléments" d'Euclide servait comme base et modèle de tout développement en géométrie. Au cours du 19e siècle, les mathématiciens se rendaient compte que ce fondement était incomplet, donc à revoir. Le célèbre texte "Grundlagen der Geometrie" ("fondations de la géométrie", 1899) de David Hilbert a répondu à ce besoin. Les axiomes les plus basiques que Hilbert propose sont des "axiomes d'incidence", du type de ceux définissant un plan projectif abstrait (déf. 2.13). Alors la question suivante se pose : les énoncés des théorèmes d'incidence (Pappus, Desargues, etc.), ont un sens dans un plan projectif abstrait $\mathbf{P}$. Est-ce qu'on peut affirmer que ces énoncés sont toujours vrais dans $\mathbf{P}$? La réponse est "non" : par exemple, Pappus est en défaut dans le "plan quaternionien" $\mathbb{HP}^2$, et Desargues est en défaut dans le "plan octonion" $\mathbb{OP}^2$. Plus précisément :

7.6. Théorème. *Soit $\mathbf{P}$ un plan projectif abstrait. Alors le théorème de Pappus est vrai dans $\mathbf{P}$ si, et seulement si, il existe un corps $\mathbb{K}$ tel que $\mathbf{P}$ est de la forme $\mathbb{KP}^2$. Le théorème de Desargues est vrai dans $\mathbf{P}$ si, et seulement si, il existe un anneau de division $\mathbb{D}$ tel que $\mathbf{P}$ est de la forme $\mathbb{DP}^2$.*

Pour prouver ce théorème, on construit le corps gauche $\mathbb{D}$ à partir des axiomes d'incidence. L'associativité de la multiplication de $\mathbb{D}$ correspond alors au théorème de Desargues, et Hilbert a montré qu'alors $\mathbb{D}$ est commutatif ssi Pappus est vérifié (et Hessenberg a montré que Pappus implique Desargues). Puis, Hilbert a formulé les axiomes d'un espace projectif abstrait de dimension n pour n quelconque (comme pour $n = 2$, ce sont des "axiomes d'incidence"), et il a montré:

7.7. Théorème. *Le théorème de Desargues est vrai dans tout espace projectif abstrait de dimension $n > 2$. Par conséquent, un tel espace est toujours de la forme $\mathbb{DP}^n$, $n > 2$, avec un anneau de division $\mathbb{D}$.*

Exercice. Démontrer le théorème de Desargues dans $\mathbb{KP}^3$, sous l'hypothèse que les deux triangles (abc) et $(a'b'c')$ se trouvent dans deux plans différents. Utiliser seulement des notions d'intersection de droites et de plans.

Il existe d'autres théorèmes de ce type qui relient des proprétées d'incidence à des structures algébriques, dont, par exemple, des résultats de la mathématicienne Ruth Moufang, cf. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Ruth_Moufang`. Le théorème 7.7 révèle un fait très profond : des structures "exceptionnels" en géométrie se trouvent seulement en "basse dimension" (ici : des espaces projectifs autres que les $\mathbb{DP}^n$ existent ; elles ne sont possibles qu'en dimension 2). Voir [Berger] pour d'autres exemples de ce principe (polytopes), et le web pour des spéculations le relatant au fait que notre univers a 4 dimensions (ou 11, ou 27, selon d'autres auteurs...).

Chapitre 8 : Le birapport sur la droite projective

La théorie de la droite projective se distingue nettement de la théorie en dimension supérieure : une raison en est qu'il n'y a pas de sous-espaces projectifs autres que les points eux-mêmes ; un hyperplan dans $\mathbb{KP}^1$ est exactement la même chose qu'un point dans $\mathbb{KP}^1$! Autrement dit, l'espace $X = \mathbb{KP}^1$ est canoniquement la même chose que son dual X'. Tout ceci devient faux en dimension supérieure, d'où le rôle particulier des droites projectives dans la théorie. En un certain sens, les notions d'incidence sont alors remplacées par une autre notion, celle de birapport (ou rapport anharmonique, anglais : cross-ratio ; cf. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Rapport_anharmonique` pour un premier survol).

8.1. Définition. Une forme symplectique sur un espace vectoriel V est une application bilinéaire et alternée $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ (i.e., $\omega(v,v) = 0$ pour tout $v \in V$) qui est non-dégénérée (i.e., si $\omega(v,w) = 0$ pour tout $w \in V$, alors $v = 0$). Remarque : l'alternance $(\omega(v,v) = 0)$ implique que ω est antisymétrique : $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$.

8.2. Lemme. *Soit* $\dim V = 2$ *et* b_1, b_2 *une base de* V. *Alors il existe une unique forme symplectique* $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ *telle que* $\omega(b_1, b_2) = 1$. *Cette forme est donnée par*

$$\omega(x_1 b_1 + x_2 b_2, y_1 b_1 + y_2 b_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Toute autre forme symplectique est un multiple de cette forme.

Ainsi ω est "unique à un scalaire non-nul près" ; on l'appelera la *forme symplectique canonique* sur V.

8.3. Corollaire. *Soit* ω *une forme symplectique sur un espace vectoriel de dimension* 2. *Alors, pour tout* $g \in \mathrm{GL}(V)$ *et pour tout* $u, v \in V$,

$$\omega(gv, gu) = \det(g) \cdot \omega(v,u)\,.$$

De plus, u *et* v *sont linéairement indépendants ssi* $\omega(u,v) \neq 0$.

8.4. Corollaire. *Soit* $\dim V = 2$. *L'application*

$$\iota : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(V^*), \quad [v] \mapsto [\omega(\cdot, v)]$$

est bien définie et indépendant du choix de forme symplectique ω sur V.

Le corollaire décrit donc une *identification canonique d'une droite projective avec son dual.* Tout point $p=[v]$ de la droite projective $\mathbb{P}V$ s'identifie avec l'hyperplan $\iota(p)$. Noter que p et $\iota(p)$ sont toujours incidents, ce qui correspond au fait que $\omega(v,v)=0$.

8.5. Définition du birapport. Soit $\dim V=2$ et ω une forme symplectique sur V, et soient $([a],[b],[c],[d])\in(\mathbb{P}V)^4$, deux à deux distincts. Leur birapport est la quantité

$$\mathrm{BR}([a],[b],[c],[d]) := \frac{\omega(c,a)}{\omega(c,b)} : \frac{\omega(d,a)}{\omega(d,b)} = \frac{\omega(c,a)}{\omega(c,b)}\cdot\frac{\omega(d,b)}{\omega(d,a)} \in \mathbb{K}\,.$$

Ceci est bien défini : la quantité ne change pas si on remplace ω, resp. a,b,c ou d, par des multiples ! Remarque : cette définition s'applique aussi à 4 points *colinéaires* dans un espace projectif de dimension supérieur – en effet les 4 vecteurs correspondants se trouvent dans un plan vectoriel, auquel la définition précédente s'applique. Par rapport à n'importe quelle base, on a la formule

$$\mathrm{BR}([a],[b],[c],[d]) = \frac{c_1a_2-a_1c_2}{c_1b_2-b_1c_2} : \frac{d_1a_2-a_1d_2}{d_1b_2-b_1d_2}\,. \qquad (*)$$

8.6 Lemme. *Le birapport est un invariant du groupe projectif : pour tout $g\in\mathrm{GL}(V)$,*

$$\mathrm{BR}([ga],[gb],[gc],[gd]) = \mathrm{BR}([a],[b],[c],[d])\,.$$

Le birapport peut être interprétée comme un rapport dans l'espace affine $\mathbb{P}V\setminus\{[d]\}$:

8.7. Théorème. *Choisissons un repère projectif $0=[e_2]$, $\infty=[e_1]$, $1=[e_1+e_2]$ et écrivons $a=a_1e_1+a_2e_2$, etc.*

(1) Supposons que a,b,c,d sont finis (i.e., $\neq\infty$) et normalisons $a_2=1=b_2=c_2=d_2$. Alors on a la "formule dans la carte canonique"

$$\mathrm{BR}([a],[b],[c],[d]) = \frac{c_1-a_1}{c_1-b_1} : \frac{d_1-a_1}{d_1-b_1} = \frac{(c_1-a_1)\times(d_1-b_1)}{(c_1-b_1)\times(d_1-a_1)}. \qquad (A)$$

(2) Si $d=\infty$ et $a_2=1=b_2=c_2$, en utilisant le rapport dans l'espace affine, cf. 1.1,

$$\mathrm{BR}([a],[b],[c],[\infty]) = R(a_1,b_1,c_1) = \frac{c_1-a_1}{c_1-b_1} \qquad (B)$$

(3) Finalement,

$$\mathrm{BR}(\infty,0,1,d) = \frac{d_1}{d_2}. \qquad (C)$$

La formule (A) peut servir pour définir le birapport de 4 points sur une droite affine. La formule (C) s'écrit, en identifiant $x\neq\infty$ avec un élément de $\mathbb{K}$, $\mathrm{BR}(\infty,0,1,x)=x$. Notation : dans la suite, nous travaillons souvent directement avec un point $a\in\mathbb{KP}^1$ au lieu d'écrire $[a]\in\mathbb{KP}^1$. Si besoin est, on peut toujours écrire a sous la forme $[v]$, $v\in V$.

8.8. Théorème. *Fixons un repère projectif, comme dans le théorème précédent, et identifions $\mathbb{P}V\setminus\{\infty\}$ avec $\mathbb{K}$. Soit $a,b,c\in\mathbb{P}V$, deux à deux distincts, et soit $f=f_{abc}^{\infty01}$ l'unique élément de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ tel que $f(a)=\infty$, $f(b)=0$, $f(c)=1$ (cf. 5.9). Alors on a*

$$\mathrm{BR}(a,b,c,d) = f_{abc}^{\infty01}(d).$$

En effet, par rapport à l'inclusion $\mathbb{K} \subset \mathbb{KP}^1$, on a, en utilisant (C) ci-dessus,

$$f(d) = \mathrm{BR}(\infty, 0, 1, f(d)) = \mathrm{BR}(f(a), f(b), f(c), f(d)) = \mathrm{BR}(a, b, c, d).$$

8.9. Remarque : birapport à valeurs dans la droite projective. Le théorème donne une autre définition possible du birapport (utilisée par beaucoup d'auteurs) : on fixe un repère, et pour a, b, c deux à deux distincts et $d \in \mathbb{KP}^1$ quelconque, on définit

$$\mathrm{BR}(a, b, c, d) := f_{abc}^{\infty 01}(d) \in \mathbb{KP}^1.$$

Comme le plongement de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{KP}^1$ dépend du repère, cette définition n'est plus indépendant du repère. Son avantage est qu'elle donne un sens au valeurs du birapport suivantes :

$$\mathrm{BR}(a, b, c, c) = 1, \quad \mathrm{BR}(a, b, c, b) = 0, \quad \mathrm{BR}(a, b, c, a) = \infty.$$

8.10. Théorème. *La réciproque du lemme 8.6 est vraie aussi : soit $f : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ une bijection qui préserve le birapport, alors f est une homographie.*

Pour la preuve, on se ramène au cas $f(\infty) = \infty$, puis on applique le lemme 1.2 à la restriction de f à la droite affine $\mathbb{K} = \mathbb{P}V \setminus \{\infty\}$.

L'ordre des 4 points dans la définition du birapport est important. Rappelons que le groupe S_4 de permutations de 4 lettres agit par permutation sur les 4 variables d'un quadruplet de points.

8.11. Théorème. *Le birapport est invariant sous les permutations $\sigma_1 := (12)(34)$ et $\sigma_2 := (14)(23)$:*

$$\mathrm{BR}(a, b, c, d) = \mathrm{BR}(b, a, d, c) = \mathrm{BR}(d, c, b, a)\,.$$

Il s'ensuit qu'il est invariant aussi sous $\sigma_3 = (13)(24)$, et donc sous le <u>groupe de Klein</u> $\{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Sous les permutations (12) et (23), le birapport se transforme selon

$$\mathrm{BR}(b, a, c, d) = \frac{1}{\mathrm{BR}(a, b, c, d)}, \qquad \mathrm{BR}(a, c, b, d) = 1 - \mathrm{BR}(a, b, c, d).$$

Les permutations données dans le théorème engendrent S_4, et donc on connait maintenant le comportement du rapport sous toute permutation.

8.12. Exercice. À partir de $\lambda = \mathrm{BR}(a, b, c, d)$, on obtient par permutation les valeurs

$$\lambda, \quad 1 - \lambda, \quad \lambda^{-1}, \quad (1 - \lambda)^{-1}, \quad 1 - \lambda^{-1}, \quad (1 - \lambda^{-1})^{-1}.$$

Montrer que ces six valeurs sont 2 à 2 différentes, sauf si l'un deux appartient à liste suivante : $-1, 1, e^{\frac{\pi i}{3}}$ (ce dernier si, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Etudier les valeurs possibles du birapport dans chacun des trois cas.

8.13. Définition. Si $\mathrm{BR}(a, b, c, d) = -1$, on dit que les quatre points *sont en division harmonique*. Étant donné un triplet de points (a, b, c), l'unique point d tel que $\mathrm{BR}(a, b, c, d) = -1$, s'appelle le *conjugué de c par rapport à a et b*.

8.14. Lemme. *Prenons d comme point à l'infini. Alors $\mathrm{BR}(a, b, c, d) = -1$ si et seulement si c est le <u>milieu</u> de a et de b dans l'espace affine $\mathbb{K} = \mathbb{KP}^1 \setminus \{d\}$.*

Exemple. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En utilisant la formule du birapport sur la droite $\mathbb{K}$, on montre que $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ sont en division harmonique ssi l'un des deux points c et d est à l'intérieur du segment $[cd]$ et l'autre à l'extérieur, et de plus les rapports de longueur $\frac{ca}{cb}$ et $\frac{da}{db}$ sont égaux. Exemple : $(0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+2})$ sont en division harmonique.

8.15. Définition. Soit $\mathbb{KP}^2$ le plan projectif sur $\mathbb{K}$. Un quadrilatère complet est la donnée de 4 droites dans $\mathbb{KP}^2$ telles que trois quelconque parmi elles ne soit pas concurrentes. Alors ces droites ont 6 points d'intersection, et parmi les droites reliant ces points entre eux il y a exactement 3 "nouvelles" droites que l'on appelera les "diagonales du quadrilatère". (Faire un dessin !)

8.16. Théorème. *Soit D une diagonale d'un quadrilatère complet, par deux points, disons a et b, du quadrilatère. Soient i et j les points d'intersection de D avec les deux autres diagonales. Alors j est le conjugué harmonique de i par rapport à a et b, i.e.:* $\mathrm{BR}(a, b, i, j) = -1$.

Chapitre 9 : Transvections et dilatations

Nous avons vu, dans le chapitre 6, deux types d'applications projectives, qui, par rapport à une carte affine, représente des homothéties, resp. des translations de cette carte affine. Nous allons les étudier d'un point de vue d'algèbre linéaire, et nous utiliserons ces résultats pour prouver quelques faits fondamentaux sur les groupes $\mathrm{GL}(V)$, $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$ et $\mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$.

9.1. Théorème. *Soit $E \subset V$ un hyperplan quelconque ($\dim E = n$, $\dim V = n+1$) et $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que g fixe E point par point, mais $g \neq \mathrm{id}_V$. Alors sont équivalents*

(1) $\lambda := \det g \neq 1$ *;*

(2) *g est diagonalisable et a une valeur propre $\lambda \neq 1$;*

(3) $\mathrm{im}(g - \mathrm{id}) \not\subset E$ *;*

(4) *il existe une base de V par rapport à laquelle g est représentée par la matrice*

$$D_\lambda := \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

9.2. Définition. Si g est comme dans le théorème, nous dirons que g est une dilatation d'hyperplan E, de droite $D := \mathrm{im}(g - \mathrm{id})$ et de rapport λ. (Interprétation en termes de $\mathbb{P}V$: $[g]$ est une homothétie de la partie affine $U_{[E]}$, avec centre $[D]$ et rapport λ.)

9.3 Théorème. *Soit $E = \ker(\alpha) \subset V$ un hyperplan quelconque et $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que g fixe E point par point, mais $g \neq \mathrm{id}_V$. Alors sont équivalents*

(1) $\lambda := \det g = 1$ *;*

(2) *g n'est pas diagonalisable ;*

(3) $\mathrm{im}(g - \mathrm{id}) \subset E$ *;*

(4) *il existe $a \in E$, $a \neq 0$, tel que $g(x) = x + \alpha(x)a$;*

(4) *il existe une base de V par rapport à laquelle g est représentée par la matrice*

$$F := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & 1_n & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.4. Définition. Si g est comme dans le théorème, nous écrivons $g(x) = T_{\alpha,a}(x) = x + \alpha(x)a$, et nous dirons que g est une <u>transvection</u> d'hyperplan $E = \ker(\alpha)$ et de droite $D := \mathrm{im}(g - \mathrm{id}) = \mathbb{K}a$. Noter que $D \subset E$. (Interprétation en termes de $\mathbb{P}V$: $[g]$ est une translation de la partie affine $U_\alpha = U_{[E]}$ avec vecteur directeur a.)

9.5. Remarque. Par des calculs directs, pour $a, b \in \ker(\alpha)$, $a' \in \ker(\alpha')$, $a \in \ker(\beta)$,

(a) $T_{\alpha,a} \circ T_{\alpha,b}(x) = T_{\alpha,a+b}(x)$, ainsi $\mathbf{T}_\alpha := \{T_{\alpha,a} \mid a \in \ker(\alpha)\}$ est un groupe ;
$T_{\alpha,a} \circ T_{\beta,a}(x) = T_{\alpha+\beta,a}(x)$, ainsi $\mathbf{T}_a := \{T_{\alpha,a} \mid \alpha \in V^*, \alpha(a) = 0\}$ est un groupe ;

(b) $T_{\alpha,a} = T_{\alpha',a'}$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times : a' = \lambda a,\ \alpha = \lambda\alpha'$;

(c) pour tout $h \in \mathrm{GL}(V)$, on a $h \circ T_{\alpha,a} \circ h^{-1} = T_{\alpha \circ h^{-1}, h(a)}$.

9.6. Théorème.

(i) *Deux transvections quelconques sont conjuguées dans* $\mathrm{GL}(V)$.

(ii) *Deux dilatations sont conjuguées dans* $\mathrm{GL}(V)$ *ssi elles ont même déterminant.*

Exercice. Est-ce que deux transvections quelconques T, T' sont toujours conjuguées dans $\mathrm{SL}(V)$, i.e., existe-t-il h avec $\det h = 1$ et $T' = hTh^{-1}$? (indication : distinguer les cas $\dim V > 2$, $\dim V = 2$ et $\dim V = 1$.)

Exercice. Montrer que, si $T : V \to V$ est une transvection, son application duale $T^* : V^* \to V^*$ en est une aussi. Conclure que, si $A \in M(n, n; \mathbb{K})$ est une matrice correspondant à une transvection, sa matrice transposée A^t l'est aussi, et en déduire que A et A^t sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(V)$. Pour la matrice $A = F$ de la forme donnée au point (4) du thm. 9.3, donner explicitement une matrice h telle que $hFh^{-1} = F^t$.

9.7. Théorème.

(i) *Le <u>centre</u>* $Z(\mathrm{GL}(V))$ *de* $\mathrm{GL}(V)$ *est le groupe* $\mathbb{K}^\times \mathrm{id}_V$.

(ii) *Le centre de* $\mathrm{SL}(V)$ *est le groupe* $\{\lambda\,\mathrm{id} \mid \lambda^{\dim V} = 1\}$.

Ce résultat implique que $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) = G/Z(G)$ pour $G = \mathrm{GL}(V)$ et $\mathbb{P}\mathrm{SL}(V) = G/Z(G)$ pour $G = \mathrm{SL}(V)$.

9.8. Théorème.

(i) *Le groupe* $\mathrm{SL}(V)$ *est engendré par les transvections.*

(ii) *Le groupe* $\mathrm{GL}(V)$ *est engendré par les transvections et les dilatations.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile à prouver : si $g \in \mathrm{GL}(V)$, il suffit d'appliquer (i) à $g' := (D_\lambda)^{-1} g$ avec $\lambda := \det g$ et D_λ une dilatation de rapport λ. Pour prouver (i), soit $G := \rangle T_{\alpha,a} \mid \alpha \in V^*, a \in V : \alpha(a) = 0\rangle$ le groupe engendré par les transvections. L'inclusion $G \subset \mathrm{SL}(V)$ est claire. Pour démontrer l'autre inclusion, on procède par

récurrence sur $\dim V$. Le cas $\dim V = 1$ est trivial. Soit $\dim V = n+1$. On considère l'ensemble
$$M := \{(v,\alpha) \in V \times V^* |\, \alpha(v) = 1\}.$$
Le groupe $\mathrm{SL}(V)$ agit sur M par $g.(v,\alpha) = (gv, \alpha \circ g^{-1})$. Soit $g \in \mathrm{SL}(V)$. S'il existe $(v,\alpha) \in M$ tel que $g.(v,\alpha) = (v,\alpha)$, alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction $g|_{\ker \alpha}$, et on conclut que $g \in G$. Sinon, on se ramène à ce cas :

Lemme. *L'action de G sur M est transitive.*

La preuve du lemme est en deux étapes : (a) l'action de G sur $V \setminus \{0\}$ est transitive ; (b) pour $v \in V \setminus \{0\}$ fixé, et si $\alpha(v) = 1 = \alpha'(v)$, $g := T_{v,\alpha-\alpha'}$ fixe v et envoit α sur α'.

Remarque. En élaborant cette preuve, on montre plus précisément que $g \in \mathrm{SL}(V)$ peut être écrit comme un produit d'au plus $n = \dim V$ transvections, sauf si g est une homothétie, auquel cas il en faut $n+1$.

9.9. Définition. Dans un groupe G, on définit le commutateur de $g, h \in G$ par
$$[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}.$$
Noter que $[g,h] = e$ ssi g et h commutent. On note $[G,G] = \{[g,h] \mid g,h \in G\}$ l'ensemble des commutateurs et $D(G) := \langle [G,G] \rangle$ le groupe dérivé (groupe engendré par $[G,G]$).

9.10. Théorème. *Supposons que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2. Alors*
(i) $D(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$;
(ii) si $\dim V > 2$, alors $D(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

La condition $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ est utilisé comme suit : si $T = T_{\alpha,a}$ est une transvection, alors $T^2 = T_{\alpha,2a}$ en est une aussi – à condition que $2 \neq 0$. Si c'est le cas, d'après 9.4, T^2 et T sont conjugués : $T^2 = hTh^{-1}$, donc $T = hTh^{-1}T^{-1} = [h,T]$, donc toute transvection est un commutateur. Comme les transvections engendrent $\mathrm{SL}(V)$, les commutateurs engendrent $\mathrm{SL}(V)$, d'où (i). Pour (ii), utiliser l'exercice 9.6. (On peut affiner ce résultat : il reste vrai dans tous les cas sauf $\dim V = 2$ et $\mathbb{K} = Z/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; cf. D. Perrin "Cours d'algèbre" p. 101-02.)

9.11. Définition. Un groupe G est dit *simple* s'il n'admet pas de sous-groupe distingué autre que le groupe trivial et G lui-même. Autrement dit, tout homomorphisme $G \to H$ dans un autre groupe H est, soit injectif, soit trivial. Ainsi les groupes simples sont les "atomes" (objets utilisés pour composer tous les autres) dans la théorie de groupes.

9.12. Exemples. Les groupes $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SL}(V)$ ne sont pas simples. Le groupe $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ n'est pas simple si $\dim V$ est paire et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

9.13. Théorème. *Supposons que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2 et $\dim V > 2$. Alors $\mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$ est simple.*

La méthode suivante de démontrer ce résultat est due à Iwasawa.

(1) Lemme. *L'action du groupe $G = \mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$ sur $X = \mathbb{P}(V)$ est doublement transitive, i.e., pour tous les couples (x,x'), $(y,y') \in X^2$ tels que $x \neq x'$ et $y \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ et $g.x' = y'$.*

(2) Soit G un groupe quelconque opérant sur un ensemble X. Alors :

(a) On montre qu'une action $G \times X \to X$ est doublement transitive ssi [elle est transitive et l'action d'un groupe stabilisateur $H := G_x$ est transitive sur $X \setminus \{x\}$]. Supposons-le dans la suite.

(b) Si $g \notin H$, alors $G = H \cup HgH$.

(c) On déduit que H est un sous-groupe *maximal* de G (i.e., maximal parmi les sous-groupes propres de G).

(d) Soit N un sous-groupe distingué de G. On montre que $NH := \{nh \mid n \in N, h \in H\}$ est un sous-groupe de G. On déduit que N opère transitivement ou trivialement sur X.

(e) Supposons qu'on a, pour tout $x \in X$, un sous-groupe T_x de G tel que:

i) T_x est commutatif,

ii) $T_{gx} = gT_xg^{-1}$,

iii) les sous-groupes T_x engendrent G.

Soit N un sous-groupe distingué de G qui n'opère pas trivialement sur X. Alors on a $G = NT_x$. On déduit que N contient le groupe des commutateurs $D(G)$.

(3) On applique (e) à la situation suivante : $G = \mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$ et $X = \mathbb{P}(V)$; si α, β sont des formes linéaires telles que $\alpha(a) = \beta(a) = 0$, on a $T_{\alpha,a} \circ T_{\beta,a} = T_{\alpha+\beta,a}$, donc, pour $x := [a]$,

$$T_x := \{T_{\alpha,a} \mid \alpha \in V^*, \alpha(a) = 0\} \cup \{\mathrm{id}\}$$

est un groupe vérifiant i), ii), iii). Conclusion : si $N \neq \{e\}$ est un sous-groupe distingué, alors, par (e), N contient le groupe dérivé $D(G)$, donc N contient $\mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$, donc $N = \mathbb{P}\mathrm{SL}(V)$.

Le cas des corps finis

C'est un cas particulier intéressant : on peut alors utiliser des arguments "de comptage". Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ un corps de cardinalité q. Alors q est de la forme $q = p^k$, p premier. Rappelons qu'alors $|\mathbb{K}\mathbb{P}^n| = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q} =: N$. Le groupe $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1; \mathbb{K})$ peut alors être vu comme un sous-groupe du groupe de permutations S_N. Si q et n sont petits, il peut y être des cas où ces groupes sont égaux.

9.14. Exercice. *Les cardinaux des groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$ sont:*
$|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - 2) \cdots (q^n - q^{n-1})$
$|\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - 2) \cdots (q^n - q^{n-1})q^{n-1}$
$|\mathbb{P}\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)| = |\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)|$
$|\mathbb{P}\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)| = |\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)|/d$*, avec* $d = PGCD(n, q-1)$.

9.15. Exercice. *On a les isomorphismes suivants :*
$\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2) \cong S_3$
$\mathbb{P}\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) \cong S_4$; $\mathbb{P}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3) \cong A_4$
$\mathbb{P}\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_4) \cong \mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_4) \cong A_5$;
$\mathbb{P}\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5) \cong S_5$; $\mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_5) \cong A_5$.

Exercice. Lesquels parmi les groupes ci-dessus sont simples ?

Chapitre 10 : Polarités et groupes orthogonaux

Nous avons insisté à bien distinguer un espace projectif $X = \mathbb{P}V$ et son espace dual $X' = \mathbb{P}(V^*)$. Or, comme X et X' sont de même dimension, ils sont isomorphes. Les isomorphismes entres les deux sont des plus grande importance en géométrie : ce sont des *corrélations* ; plus précisément, il y a deux types, celles qui sont *isotropes*, et les autres, les *polarités*.

Reférence bibliographique pour ce chapitre : Daniel Perrin, "Cours d'algèbre", Ellipses, Paris 1996.

10.1. Théorème. *Soit $X = \mathbb{P}V$ et $X' = \mathbb{P}V^*$. Il existe une bijection entre*

- *homographies $[f] : X \to X'$*
- *classes de formes bilinéaires non-dégénérées $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$, où une forme β et son multiple $r\beta$ ($r \in \mathbb{K}^\times$) sont considérées comme équivalent.*

Cette bijection fait correspondre à β l'application $f : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(v, \cdot)$.

10.2. Définition. Soit $[f] : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V^*$ comme ci-dessus. Soit $x = [v] \in X$. L'hyperplan

$$x^\perp := [f](x) = \{[w] \in X \mid \beta(v, w) = 0\}$$

s'appelle la polaire du pôle x. Un élément $x \in X$ est dit isotrope pour $[f]$ si x et $[f](x)$ sont incidents (autrement dit, x appartient à sa polaire), et anisotrope sinon. L'ensemble des points isotropes s'appelle la quadrique de $[f]$, notée

$$Q_{[f]} := Q_\beta := \big\{[v] \in X \mid \beta(v, v) = 0\big\}.$$

Pour être précis, il faudrait distinguer une "polaire à droite" et une "polaire à gauche", l'une définie par la condition $\beta(v, w) = 0$, l'autre par $\beta(w, v) = 0$. Heureusement, si β est symétrique ou antisymétrique, les deux conditions coïncident :

10.3.Théorème. *Soit $[f] : X \to X'$ comme ci-dessus. Alors sont équivalentes :*

(i) β est symétrique ou antisymétrique ;

(ii) $f^* = f$ ou $f^* = -f$;

(iii) β est reflexive, i.e., $\forall x, y \in V$: $\qquad \beta(x, y) = 0 \iff \beta(y, x) = 0.$

Pour la preuve, petit rappel d'algèbre linéaire.

(1) Si $\dim V < \infty$, on a un isomorphisme canonique $V \cong (V^*)^*$;

(2) pour une application linéaire $f : V \to W$, on a une application duale $f^* : W^* \to V^*$. Ainsi, si $f : V \to V^*$ est linéaire, alors on a $f^* : V = (V^*)^* \to V^*$;

(3) on a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;

(4) une forme bilinéaire $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ donne lieu à une application linéaire $b : V \to V^*$, $v \mapsto \beta_v$, où
$$\beta_v : V \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \beta_v(x) := \beta(v, x),$$
et réciproquement ; alors b est bijective ssi β est non-dégénérée, et l'application $b^* : V \to V^*$ correspond à la forme opposée $\beta'(x, y) := \beta(y, x)$. Ainsi, β est (anti-) symétrique ssi $b^* = b$ (resp. $b^* = -b$).

L'équivalence entre (i) et (ii) en découle. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est triviale ; reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (ii) : d'abord, (iii) équivaut à dire que $[f] = [f^*]$; or $[f] = [f^*]$ implique que $f^* = \lambda f$, donc $f = (f^*)^* = \lambda^2 f$, donc $\lambda^2 = 1$. Pour $\lambda = 1$, β est symétrique, pour $\lambda = -1$, β est antisymétrique, d'où (i).

10.4. Définition. Soit $[f] : X \to X'$ comme ci-dessus. On appelle $[f]$ une correlation si β est reflexive. Alors deux cas se présentent :

(a) β est une forme quadratique non-dégénérée : on dit que $[f]$ est une polarité ;

(b) β est une forme symplectique, i.e., une forme bilinéaire symétrique alternée et non-dégénérée. Pour désigner $[f]$, il n'y a pas de terme français communement utilisé : nous utilisons le terme anglais null-system.

10.5. Lemme. *Soit la corrélation $[f]$ donnée par la forme bilinéaire β. Alors :*

(i) la forme β est symplectique ssi tout $x \in X$ est isotrope,

(ii) la forme β est symétrique ss'il existe un élément anisotrope dans X.

10.6. Exemples.

(1) Des “null-systems” existent ssi $\dim V$ est paire, ssi $\dim X$ est impaire. Pour $\dim X = 1$, il n'y a qu'un seul null-system : il correspond à la forme symplectique canonique (chapitre 8). Pour $\dim X \geq 3$, les “null-systems” ne jouent pas un rôle très important en géométrie projective classique.

(2) $V = \mathbb{R}^{n+1}$: un produit scalaire donne lieu à une polarité elliptique de $\mathbb{RP}^n$, i.e., la quadrique Q_β est vide : en effet, $\beta(v,v) > 0$ pour tout $v \neq 0$.

(3) $V = \mathbb{C}^{n+1}$: il n'existe aucune polarité elliptique, en effet, sur $\mathbb{C}^{n+1}$, toute forme bilinéaire symétrique admet des vecteurs isotropes (exercice) ! Rappelons que les produits scalaires sur $\mathbb{C}^{n+1}$ sont sesquilinéaires, et non bilinéaires. Faute de temps, nous ne traitons pas dans ce cours le cas plus général de formes sesquilinéaires (cf. Perrin, loc. cit.).

(4) $V = \mathbb{K}^3$, $\beta(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$: pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 | \beta(x,x) = 0\}$ est la surface d'un cône, et la quadrique de Q_β est l' “exemple fondamental” d'une conique du chapitre 3.

Groupes orthogonaux et symplectiques

10.7. Lemme. *Pour toute forme bilinéaire $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$,*

$$\mathrm{O}(\beta) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \forall v, w \in W : \beta(gv, gw) = \beta(v,w)\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$*, dit le groupe orthogonal de β. Si $V = \mathbb{K}^n$ et $\beta(x,y) = x^t By$ avec $B \in M_n(\mathbb{K})$, alors*

$$\mathrm{O}(\beta) = \mathrm{O}(B, \mathbb{K}) := \big\{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A^t BA = B\big\}.$$

10.8. Définition. On note $\mathrm{SO}(\beta) := \mathrm{O}(\beta) \cap \mathrm{SL}(V)$. Le groupe orthogonal projectif est $\mathbb{P}\mathrm{O}(\beta) := \{[g] \mid g \in \mathrm{O}(\beta)\} \subset \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$. Si $B = 1_n$, i.e., $\beta(x,y) = x^t y$, on note $\mathrm{O}(n, \mathbb{K})$, parfois dit “le” groupe orthogonal. Si β est une forme symplectique, on préfère noter $\omega := \beta$ et $\mathrm{Sp}(\omega)$ le groupe $\mathrm{O}(\omega)$, dit le groupe symplectique de ω.

10.9. Exemples, et remarques sur la classification.

(A) Formes symplectiques ω. Si $\dim V = 2$, il n'y a qu'une seule, et le corollaire 8.3 montre que $g \in \mathrm{Sp}(\omega)$ ssi $\det(g) = 1$. Autrement dit, on a $\mathrm{Sp}(\omega) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$.

Si $\dim V = 2m$, il existe toujours une base par rapport à laquelle ω a comme matrice

$$J_m := \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut appeller $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{K}) := \mathrm{O}(J_m, \mathbb{K})$ "le" groupe symplectique.

(B) Formes quadratiques non-dégénérées β.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il existe toujours une base par rapport à laquelle β a comme matrice 1_n. Le groupe orthogonal est alors isomorphe à $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il existe toujours une base par rapport à laquelle β a comme matrice

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \qquad p + q = n = \dim V.$$

On note alors $\mathrm{O}(p, q) := \mathrm{O}(I_{p,q}, \mathbb{R})$, dit le groupe pseudo-orthogonal (de signature (p, q)). Le groupe $\mathrm{O}(3, 1)$ est le groupe de Lorentz, groupe important en théorie de relativité.

$\mathbb{K}$ quelconque : classification difficile, voire impossible !

Attention : si $V = \mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique $\langle z, w\rangle = z^t\overline{w}$ n'est pas bilinéaire, mais sesquilinéaire. Le groupe correspondant est le groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$; il n'est pas à confondre avec $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$!

10.10. Remarque. Le groupe $\mathrm{O}(\beta)$ agit sur $\mathbb{P}V$. L'action n'est pas transitive, en général. Question : quelles sont les orbites ? La réponse générale sera donnée par le théorème de Witt. Il est utile d'étudier d'abord quelques exemples / exercices :

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, β un produit scalaire : montrer que l'action de $\mathrm{O}(n+1)$ et celle de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur $\mathbb{RP}^n$ est transitive. (Indication : utiliser des résultats connus sur les bases orthonormées.) Ecrire $\mathbb{RP}^n$ sous forme d'espace homogène pour ces actions. Cet exemple n'est pas typique.

(2) Si x est isotrope, alors $g.x$ l'est aussi, pour tout $g \in \mathrm{O}(\beta)$. Ainsi, $\mathrm{O}(\beta)$ agit sur la quadrique Q_β. Question : cette action, est-elle transitive ? Commencer par regarder l'exemple de la conique réelle (Chapitre 3).

Le théorème de Witt

10.11. Cadre géométrique. Le groupe $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$, ainsi que tout sous-groupe, agit sur la Grassmannienne $\mathrm{Gras}_k(V)$ (cf. Lemme 7.4 ; noter que $\mathrm{Gras}_1(V) = \mathbb{P}V$ et $\mathrm{Gras}_{n-1}(V) \cong \mathbb{P}V^*$). En utilisant des bases, on montre facilement que l'action de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{Gras}_k(V)$ est transitive.

Fixons, pour toute la suite, une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ et forme quadratique $q(v) = \beta(v, v)$. Alors l'action de $\mathbb{P}\mathrm{O}(\beta)$ sur $\mathrm{Gras}_k(V)$ n'est plus transitive en général. Le théorème de Witt, résultat principal de ce chapitre, caractérise les orbites : *deux sous-espaces $E, F \subset V$ de même dimension sont dans la même orbite sous l'action de $\mathbb{P}\mathrm{O}(\beta)$ ssi les restrictions $\beta_E := \beta_{E\times E}$ et $\beta_F := \beta_{F\times F}$ sont isomorphes, i.e., ssi β_E et β_F peuvent être décrites, par rapport à des bases convenables, par une même matrice.*

10.12. Définition. Soit $E \subset V$ un sous-espace vectoriel.

(1) On dit que E est non-isotrope ou non-dégénéré (pour β) si $E \cap E^\perp = 0$, autrement dit, si la forme $\beta_E := \beta|_{E\times E}$ est non-dégénérée. (Rappel : il s'ensuit que $V = E \oplus E^\perp$.) [Remarque : ne pas confondre ceci avec sous-espace anisotrope, i.e., un sous-espace E tel que $q(v) \neq 0$ pour tout $v \in E \setminus \{0\}$.]

(2) On dit que E est un sous-espace isotrope si $E \cap E^\perp \neq 0$.

(3) On dit que E est un sous-espace totalement isotrope si $E \subset E^\perp$, i.e., si $\beta(E, E) = 0$.

(4) On dit que E est un sous-espace lagrangien si $E = E^\perp$.

Exemple. Soit $V = \mathbb{K}^{2m} = \mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^m$ et $\beta(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_{i+m}$. Soit $E_1 = \mathbb{K}^m \oplus 0$ le premier et $E_2 = 0 \oplus \mathbb{K}^m$ le deuxième facteur de $\mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^m$. Alors E_1 et E_2 sont deux sous-espaces lagrangiens.

10.13. Proposition. *Soit $E \subset V$ un sous-espace non-isotrope, et écrivons $V = E \oplus E^\perp$. Soit $g \in \mathrm{O}(\beta)$. Alors sont équivalents :*

(1) $g(E) = E$,

(2) il existe $g_1 : E \to E$, orthogonal pour β_E, et $g_2 : E^\perp \to E^\perp$, orthogonal pour $\beta_{E^\perp}$, tels que $g(v + w) = g_1(v) + g_2(w)$ (où $v \in E$, $w \in E^\perp$).

En prenant $g_1 = \mathrm{id}_E$ et $g_2 = -\mathrm{id}_{E^\perp}$, on obtient une application $\sigma_E \in \mathrm{O}(\beta)$, la symétrie orthogonale par rapport à E.

10.14. Théorème de Witt, cas non-isotrope. *Soit $E, F \subset V$ deux sous-espaces non-isotropes, et soit $\phi : E \to F$ une isométrie entre (E, β_E) et (F, β_F). Alors il existe un prolongement de ϕ en une isométrie de β, i.e., il existe $\Phi \in \mathrm{O}(\beta)$ tel que, pour tout $v \in E$, on a $\Phi(v) = \phi(v) \in F$.*

La preuve est par récurrence sur $k = \dim E$. L'étape cruciale de la preuve est le cas $k = 1$: on peut alors écrire $E = \mathbb{K}v$ et $F = \mathbb{K}w$ avec $w = \phi(v)$ et $q(v) = q(w) \neq 0$. Alors $q(v + \varepsilon w) \neq 0$ avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, et $\beta(v + w, v - w) = 0$. Il s'ensuit que $D := \mathbb{K}(v + \varepsilon w)$ est une droite non-isotrope. Si $\varepsilon = 1$, la symétrie $\Phi := \sigma_D$ vérifie les conditions du théorème car

$$\sigma_D(v) = \sigma_D\left(\frac{v + w}{2} + \frac{v - w}{2}\right) = \frac{v + w}{2} - \frac{v - w}{2} = w,$$

et si $\varepsilon = -1$, $\Phi := -\sigma_D$ convient, par un calcul similaire. Puis, par des techniques standards, on montre alors que l'affirmation est vraie au rang $k + 1$ si elle est vraie au rang k.

10.15. Exemple. Soit $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ et $\beta(x, y) = x^t I_{p,q} y$, donc $\mathrm{O}(\beta) = \mathrm{O}(p, q)$. Un sous-espace $E \subset V$ est alors dit positif si β_E est définie positive. Il est clair que tout les sous-espaces positifs de même dimension sont isométriques (choisir des bases orthonormées). D'après 10.14, il s'ensuit que tous les sous-espaces positifs de même dimension sont conjugués sous l'action de $\mathrm{O}(p, q)$. En particulier, comme $E = \mathbb{R}^p$ (premier facteur) est positif, et, en utilisant 10.14, son orbite dans $\mathrm{Gras}_p(\mathbb{R}^n)$ s'écrit

$$\mathrm{O}(p, q).E = \mathrm{O}(p, q)/(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)).$$

Pour $p = 1$ et $q = 2$, cette orbite s'identifie au disque unité de $\mathbb{R}^2$ (disque de Poincaré).

10.16. Lemme. *Soit $E \subset V$ un sous-espace isotrope et $E_0 := \ker(\beta_E) = E \cap E^\perp$. Soit U un sous-espace vectoriel tel que $E = E_0 \oplus U$ (il est donc non-isotrope). Soit $b_1, \ldots, b_r$ une base de E_0. Alors il existe des vecteurs $c_1, \ldots, c_r \in V$ tels que :*

(i) $\beta(b_i, c_i) = 1$ et $\beta(b_i, b_i) = 0 = \beta(c_i, c_i)$, i.e., $P_i := \mathbb{K}b_i \oplus \mathbb{K}c_i$ est un plan hyperbolique; cf. lemme 3.9 ;

(ii) la somme $H := U + P_1 + \ldots + P_r$ est une somme directe orthogonale.

On écrira cet énoncé sous forme matricielle ! Noter que H est un sous-espace non-isotrope, ainsi on a "prolongé" ou "agrandi" un espace isotrope E en un espace non-isotrope H.

La preuve est par récurrence sur $k = \dim E_0$. Comme pour 10.14, la partie importante et géométrique est le cas $k = 1$: dans ce cas, on a $E_0 = \mathbb{K}v$ avec v isotrope, et on peut trouver $u \in U^\perp$ tel que $\mathbb{K}u \oplus \mathbb{K}v$ est un plan hyperbolique (preuve : lemme 3.9). Par des techniques standard, on en déduit l'énoncé pour k quelconque.

10.17. Corollaire. *Si E est totalement isotrope ($E = E_0$), on peut trouver un sous-espace H de dimension double, contenant E, et somme directe de plans hyperboliques (on dit que H est un sous-espace hyperbolique). Si E est lagrangien, on aura alors $H = V$.*

10.18. Théorème de Witt, cas général. *Soit $E, F \subset V$ deux sous-espaces, et soit $\phi : E \to F$ une isométrie entre (E, β_E) et (F, β_F). Alors il existe un prolongement de ϕ en une isométrie de β, i.e., il existe $\Phi \in \mathrm{O}(\beta)$ tel que, pour tout $v \in E$, on a $\Phi(v) = \phi(v) \in F$.*

Pour la preuve, il suffit de combiner le lemme 10.16 avec le théorème 10.14 : si E est non-isotrope, l'énoncé est couvert par 10.14 ; sinon, on décompose $E = E_0 \oplus U$ et $F = \phi(E) = \phi(E_0) \oplus \phi(U)$ comme dans le lemme 10.16, avec $b_i' = \phi(b_i)$, on construit des plans $P_1, \ldots, P_r$, resp. $P_1', \ldots, P_r'$ selon ce lemme ; on a donc des isométries $P_i \to P_i'$, ce qui fournit une isométrie $H \to H'$. Or, H est non-isotrope, donc en utilisant 10.14, on peut prolonger en une isométrie sur V tout entier.

Le théorème de Witt a de nombreuses conséquences, et c'est un outil indispensable pour l'étude plus détaillée des groupes orthogonaux (centre ; simplicité,... cf. Perrin, loc. cit.) Mentionnons ici seulement les points suivants :

(1) Deux sous-espaces totalement isotropes de même dimension sont toujours isométriques (n'importe quelle bijection linéaire entre eux est une isométrie), donc d'après Witt, ils sont dans la même $\mathrm{O}(\beta)$-orbite. En particulier, pour $\dim E = 1$, il s'ensuit que la quadrique Q_β est homogène sous $\mathrm{O}(\beta)$.

(2) De (1), il s'ensuit aussi que les sous-espaces totalement isotropes *maximaux* sont tous conjugués entre eux sous l'action de $\mathrm{O}(\beta)$; ils sont donc tous de même dimension ν qu'on appelle l'indice de β.

(3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ et $\beta(x, y) = x^t I_{p,q} y$, on peut maintenant énumérer toutes les orbites de l'action de $\mathrm{O}(\beta)$ sur $\mathrm{Gras}_k(\mathbb{R}^n)$: exercice...

Chapitre 11 : Retour sur la conique

Dans un plan projectif $\mathbb{KP}^2$, il n'y a qu'un seul type de quadrique propre, "la" conique propre non-vide (Lemme 3.10). Dans $\mathbb{KP}^1$, nous avons l'analogue suivant :

11.1. Lemme. *Soit $\mathbb{P}V$ une droite projective ($\dim V = 2$) et $Q = Q_\beta$ une quadrique dans $\mathbb{P}V$. Alors précisement les 4 cas suivants peuvent se produire:*

(0) rang nul : $Q = \mathbb{P}V$;

(1) rang un : Q contient un seul point ;

(2a) rang deux, anisotrope : $Q = \emptyset$;

(2b) rang deux, isotrope : Q contient deux points.

11.2. Proposition. *Supposons Q est de type (2b) ci-dessus, et écrivons $Q = \{a, b\}$ avec $a, b \in \mathbb{P}V$, $a \neq b$. Alors la polaire du point $x \in \mathbb{P}V$ s'identifie au point $y \in \mathbb{P}V$ tel que*

$$\mathrm{BR}(x, y, a, b) = -1.$$

Soit $\dim \mathbb{P}V = n$ et $Q = Q_\beta$ une quadrique dans $\mathbb{P}V$. Le lemme 11.1 implique :

11.3. Proposition. *Pour une droite $D = [E] \subset \mathbb{P}V$ ($\dim E = 2$), précisement les cas suivants peuvent se produire :*

(0) rang nul : $D \subset Q$;

(1) rang un : $D \cap Q$ contient un seul point ;

(2a) rang deux, anisotrope : $D \cap Q = \emptyset$;

(2b) rang deux, isotrope : $D \cap Q$ contient deux points.

11.4. Définition. Dans le cas (2b), D est dite une sécante de Q, dans les cas (0) ou (1), D est dite une tangente de Q.

11.5. Construction de la polaire. Soit $\dim \mathbb{P}V = 2$ et $x \in \mathbb{P}V$. La polaire $x^\perp$ de x est une droite de $\mathbb{P}V$. La proposition 11.2 permet de donner une construction géométrique de cette droite (si Q est non-vide) : dessiner une sécante D de Q passant par x, avec points d'intersection a, b, et une autre D', avec points d'intersection a', b'. Les 4 points a, a', b, b' forment un quadrilatère. Soit $c = (ab') \cap (a'b)$ et $c' = (aa') \cap (bb')$. Il s'ensuit du théorème 8.16 que $x^\perp = (cc')$.
Si x est point d'intersection de deux tangentes D, D', qui touchent Q en a, a', on a aussi que $x^\perp = (aa')$.

11.6. La projection stéréographique. Soit $Q = Q_\beta$ une quadrique propre non-vide, et fixons un point $p \in Q$. Considérons l'hyperplan $H := H_\infty := p^\perp$ comme "hyperplan à l'infini". Soit $x \in A := \mathbb{P}V \setminus H$. La droite $x \vee p$ intersecte Q en p, elle n'est pas tangente, donc on est dans le cas (2b) : outre p, elle a donc exactement un autre point d'intersection avec Q. Ainsi nous avons une bijection entre l'ensemble p_A^* des droites qui passent par p et ne sont pas dans H, et l'ensemble $Q_A = Q \cap A$:

$$Q_A \to p_A^*, \quad x \mapsto x \vee p, \qquad p_A^* \to Q_A, \quad D \mapsto D \cap Q.$$

Pour une description plus "directe", on pourra choisir un hyperplan B qui ne contient pas p. Alors $B' := B \cap A$ est un hyperplan dans A qui intersecte toutes les droites $x \vee p$ en un unique point, et donc nous avons deux bijections réciproques

$$Q_A \to B', \quad x \mapsto (x \vee p) \wedge B', \qquad B' \to Q_A, \quad y \mapsto (y \vee p) \cap Q.$$

dites projection stéréographique (de centre, ou : de pôle, p). On remarquera l'analogie forte avec la définition d'une perspective (déf. 5.12). Exemple classique : Q la sphère dans $A = \mathbb{R}^3$, $p = N$ le pôle nord, $B' \cong \mathbb{R}^2$ l'hyperplan équateur. On obtient une bijection entre $S^2 \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin !).

11.7. Théorème. *Soit* $\dim \mathbb{P}V = 2$, *et retenons les notations du point précédent. Alors la bijection* $B' \to Q_A$ *se prolonge en une bijection* $\pi_p : B \to Q$ *si on pose* $\pi_b(\infty) = p$ *(où* $\infty = B \cap H$ *est le point à l'infini de* B'*). De plus, si* $m \in Q$ *est un autre point et* T *une droite telle que* $m \notin T$, *alors la composée ("changement de cartes")*

$$\pi_m \circ (\pi_p)^{-1} : \mathbb{KP}^1 \cong B \to T \cong \mathbb{KP}^1$$

est une homographie.

La bijectivité est une conséquence du fait que $Q \cap p^\perp = \{p\}$ (le "cas (0)" ne peut pas se produire si $\dim V = 3$ et si Q est propre). Pour montrer que $\pi_m \circ (\pi_p)^{-1}$ est une homographie, remarquons d'abord que le choix B et de T n'a pas grande importance (tout autre choix pour B ou T revient à rajouter une perspective ; or, toute perspective est une homographie, ce qui ne change pas l'énoncé.) On choisit alors une base b_1, b_2, b_3 de V telle que $q(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ et $p = [b_2 + b_3]$ et $m = [b_2 - b_3]$. On choisit $B = T$ la droite projectivisée du plan de base e_1, e_3. Faisons alors un calcul affine on posant $x_3 = 1$. L'image affine de Q est donné par $x_1^2 + x_2^2 = 1$, celle de p par $(0,1)$ et de m par $(0,-1)$, et B est la droite $\{(t,0) | \, t \in \mathbb{K}\}$. Faire un dessin dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (cercle, avec $a := ((0,t) \vee (0,1)) \cap Q$ et $y := (a \vee m) \cap B$.) Dans cette situation, on a :

$$\pi_m \circ (\pi_p)^{-1}(0,t) = (0, t^{-1})$$

(preuve : calcul direct, ou pour éviter le calcul : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, utiliser un argument de géométrie euclidienne : le triangle apm est rectangle en a. Dans le cas de $\mathbb{K}$ quelconque, utiliser un argument projectif : retrouver encore un quadrilatère, et déduire que $\mathrm{BR}(t, y, 1, -1) = -1$, d'où $y = t^{-1}$.) Comme $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto t^{-1}$ est une homographie, le théorème est prouvé.

11.8. Corollaire (Birapport sur la conique). *Soit* Q *une conique propre non-vide. Alors le* birapport *d'un quadruplet de points* $(a,b,c,d) \in Q$ *est bien défini par*

$$\mathrm{BR}(a,b,c,d) := \mathrm{BR}\big(\pi_p^{-1}(a), \pi_p^{-1}(b), \pi_p^{-1}(c), \pi_p^{-1}(d)\big).$$

11.9. Un théorème de Pascal. *Soient* a, b, c, a', b', c' *les sommets d'un hexagone inscrit dans une conique. Alors les points d'intersection des cotés opposés sont alignés.*

Faire un dessin du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, avec image affine de Q une ellipse, a, b, c, a', b', c' sur Q pris dans cet ordre, l'hexagon étant donné par des segments successifs $a'bc'ab'ca'$. On marquera les points $x := (bc') \cap (ca')$ et $y := (ac') \cap (ba')$. Il faut montrer que les 3 points

$$u := (bc') \cap (cb'), \quad v := (ac') \cap (ba'), \quad w := (ab') \cap (ba')$$

sont alignés, autrement dit, que $p_v(u) = w$, pour la perspective $p_v : (bc') \to (ba')$. Ceci, à son tour, revient à montrer que

$$\mathrm{BR}(b, c', x, u) = \mathrm{BR}(b, y, a', w)\,.$$

La preuve vient alors du fait que, par projection stéréographique depuis a, respectivement depuis c, ces birapports sont tous les deux égaux à $\mathrm{BR}(b, c', a', b')$, pris sur la conique Q.

Exercice : formuler le théorème corrélatif (théorème de Brianchon).

Littérature : [Audin], [Berger] et le projet de livre de D. Perrin, cf. page 1 de ce résumé.