

UE 3 U 11 : Abrégé de cours

Analyse 3 : fonctions analytiques

Les notes suivantes, disponibles à l'adresse <http://www.iecn.u-nancy.fr/~bertram/>, contiennent les définitions et les résultats principaux du cours. Elles ne remplacent ni un polycopié complet, ni le cours lui-même.

Chapitre 1 : “Fonctions analytiques” - introduction

Les fonctions dites “analytiques” sont des fonctions qui ont des propriétés encore meilleures que celles des fonctions différentiables. Rappelons que les fonctions différentiables admettent une approximation, en un point x_0 donné, par une fonction *polynomiale* : c'est la fameuse *formule de Taylor*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k + R_k(x_0, h).$$

Le point essentiel du théorème de Taylor est de fournir un bon contrôle du “terme de reste” $R_k(x_0, h)$ (que l'on peut écrire sous forme d'une intégrale, ou sous d'autres formes). En calcul différentiel, on s'intéresse principalement au comportement de ce terme *quand h tend vers 0*: sa contribution (pour k fixé) est négligeable envers les autres termes qui sont polynomiaux en h , ainsi f est approchée, au voisinage de x_0 , par le polynôme

$$p(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_kh^k, \quad \text{avec } a_i = \frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0).$$

Une autre question importante concerne le comportement du terme de reste *quand k tend vers l'infini* (et h et x_0 restent fixés): est-ce que la partie polynomiale approche f de mieux en mieux quand k tend vers l'infini? Autrement dit, est-ce que $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x_0, h) = 0$?

On verra que, pour les “bonnes” fonctions (les fonctions analytiques), cela sera le cas. Mais en général, la réponse est “non”, comme le montre le contre-exemple suivant :

1.1. Exemple. La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^0 (= continue), mais non de classe C^1 . La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 , mais non de classe C^2 , etc. Exercice (TD) : la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ , mais sa “série de Taylor” à l’origine est identiquement nulle : on montre que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k , ainsi la partie polynomiale est toujours nulle, et le terme reste $R_k(0, h)$ ne converge pas vers 0 pour $k \rightarrow \infty$ quand $h > 0$.

Pour décrire les “bonnes” fonctions, commençons par une simple reformulation :

1.2. Lemme. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . Alors la propriété (1) suivante implique (2) :*

(1) *f est de classe C^∞ , et, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout h dans un voisinage de 0, on a*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x_0, h) = 0 ;$$

(2) *pour tout $x_0 \in I$, il existe des coefficients a_0, a_1, \dots tels que, pour tout h dans un voisinage de 0,*

$$f(x_0 + h) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j h^j \right).$$

Nous montrerons plus tard dans le cours que la propriété (2) implique aussi la propriété (1) (le travail le plus important consiste à montrer déjà que (2) implique que f est de classe C^∞). Ceci justifiera les définitions suivantes :

1.3. Définition. Une série entière convergente est la donnée d’une suite a_0, a_1, \dots telle que, pour tout x dans un voisinage de 0, la limite suivante existe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k a_j x^j.$$

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite analytique si, pour tout $x_0 \in I$, il existe une série entière convergente telle que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j.$$

Un avantage de ces définitions est qu’elles ont un sens tout aussi bien pour les nombres complexes que réels : on peut traiter les fonctions réelles analytiques et complexes analytiques en même temps. Un objectif principal du cours sera l’étude des séries entières et des fonctions analytiques. On montrera que pratiquement toutes les fonctions dites “élémentaires” sont en effet analytiques, ce qui permettra de les définir et d’étudier de façon rigoureuse, non seulement sur les domaines réelles, mais aussi sur des domaines complexes.

1.4. Exemple. Supposons qu’il existe une fonction analytique telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Alors, par récurrence, on a $f^{(k)} = f$ pour tout k , et donc les coefficients de Taylor de f au point $x_0 = 0$ sont $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!}$, et ainsi f est donnée par la série entière

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j.$$

Nous allons montrer que cette formule définit en effet une fonction analytique, la fonction exponentielle – c’est la fonction la plus importante en mathématiques. De façon

similaire on étudiera d'autres fonctions élémentaires. Voici une liste de telles fonctions et de leurs séries entières :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \\ \sin(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \\ \cos(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \\ \operatorname{sh}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1} \\ \operatorname{ch}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} x^{2j} \\ \log(1+x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} x^{j+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j \quad \text{où} \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \end{aligned}$$

Pour toutes ces formules, il faut bien vérifier pour quels $x \in \mathbb{R}$, resp. pour quels $x \in \mathbb{C}$, elles sont valables.

Afin de définir des fonctions analytiques un peu moins élémentaires, nous aurons besoin d'intégrales généralisées (qui portent sur des intervalles quelconques), comme par exemple

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

qui définit l'importante fonction Gamma.

Un autre point de vue sur les fonctions analytiques consiste à remplacer les "monômes" $f_n(x) = x^n$, qui apparaissent dans le développement $\sum_n a_n x^n$, par d'autres fonctions f_n , par exemple par d'autres polynômes, ou par des fonctions trigonométriques comme $f_n(x) = \sin(nx)$. Ce dernier choix est particulièrement adapté aux fonctions périodiques, et il mène à la notion de séries de Fourier que nous allons étudier à la fin du cours.

Chapitre 2 : Séries numériques – notions de base

2.1. Définition. Une série numérique (réelle ou complexe), de terme général u_n , (où $u_n \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Le terme S_n est la n -ième somme partielle. On dit que la série est convergente si la suite (S_n) converge au sens usuel vers une limite S , et dans ce cas on écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge. (Attention : par abus de notation, on écrit souvent "la série $\sum_{k=0}^n u_k$ " pour désigner la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles, sans vouloir affirmer qu'elle converge.)

2.2. *Exemple : la série géométrique.* Soit $h \in \mathbb{C}$ et $u_n = h^n$. On sait qu'alors

$$S_n = 1 + h + \dots + h^n = \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h},$$

et cette suite converge ssi $|h| < 1$, et dans ce cas sa limite est $\sum_{k=0}^{\infty} h^k = \lim S_n = \frac{1}{1-h}$.

2.3. *Exemple : la série harmonique.* Soit $u_0 = 0$, $u_n = \frac{1}{n}$. Alors la série $\sum_n u_n$ diverge. En effet, les sommes

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2/4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4/8} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8/16} + \dots$$

ne sont pas bornées, donc ne définissent pas une suite convergente. Exercice : calculer le tableau de valeurs (n, S_n) , avant de regarder http://fr.wikipedia.org/wiki/Serie_harmonique.

2.4. *Exemple : la série harmonique alternée.* Soit $u_0 = 0$, $u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. On voit facilement : les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones (croissante, resp. décroissante) et adjacentes, donc la série $\sum_n u_n$ converge. (Nous verrons plus tard : la limite vaut $\log(2)$.)

2.5. *Exemple : les sommes télescopiques.* Soit b_n une suite quelconque et $u_0 := b_0$ et $u_n := b_n - b_{n-1}$ si $n \geq 1$. Alors

$$S_n = b_0 + (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n,$$

et ainsi la suite b_n converge ssi la série $\sum_k u_k$ converge. L'astuce consiste souvent à mettre une série sous cette forme (exemple : $u_n = \frac{1}{n^2+n}$). Plus généralement, on voit ainsi que toute suite numérique peut être vue comme une série, et réciproquement : il s'agit au fond du même objet. Ainsi, les preuves des résultats suivants sont simplement des ré-interprétations de résultats connus pour les suites :

2.6. Théorème (Critère de Cauchy pour les séries). *Une série (réelle ou complexe) $\sum u_n$ converge si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n \geq N$,*

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

Remarque. Le critère de Cauchy est intimement lié à une propriété fondamentale des nombres réels, la complétude. Si ce lien n'a pas été discuté en cours de L1, voir des suppléments fournis séparément dans ce cours et lors des TD. Voici quelques liens internet (un peu encyclopédiques, mais qui illustrent bien l'importance du sujet) :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_reel

http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Cauchy

Remarquons aussi que, si la série converge, pour $m = n$, il s'ensuit que $|u_n| < \varepsilon$, ainsi u_n converge nécessairement vers 0. L'exemple de la série harmonique montre que la réciproque est fautive : $\frac{1}{n}$ converge vers 0, mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2.7. Théorème (Somme et multiples). La somme $\sum_n (u_n + v_n)$ de deux séries convergentes $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ est convergente, et un multiple scalaire $\sum_n cu_n$ avec $c \in \mathbb{K}$ d'une série convergente est convergente. Pour les limites on a alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Ainsi $V := \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_n u_n \text{ converge}\}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , resp. sur \mathbb{C} .

2.8. Théorème (Monotonie) Soit $u_n \geq 0$ pour tout n . Alors la série $\sum_n u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est bornée.

2.9. Définition. Une série réelle ou complexe $\sum_n u_n$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge.

Exemple. La série harmonique alternée converge, mais elle ne converge pas absolument.

2.10. Théorème (Convergence absolue). Toute série absolument convergente est convergente, et de plus on a $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

2.11. Théorème (Comparaison de séries). Soit $c_n \geq 0$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $|u_n| \leq c_n$ pour (presque) tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_n u_n$ converge absolument.

Remarque. Le mot “presque” veut dire ici : “à un nombre fini d’exceptions près” (on peut toujours modifier, rajouter ou enlever un nombre fini de termes dans une série sans changer la nature – convergente ou non – de cette série !).

2.12. Théorème (“Règle de Cauchy”). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. S’il existe $q \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq q < 1$ et $C > 0$ tels que $|u_n| \leq Cq^n$ pour (presque) tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_n u_n$ converge absolument.

2.13. Théorème (“Règle de D’Alembert”). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. S’il existe $q \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq q < 1$ tel que $|u_{n+1}| \leq q|u_n|$ pour (presque) tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_n u_n$ converge absolument.

2.14. *Exemple.* Soit $u_n = \frac{1}{n!}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < q = 1/2$ pour tout $n > 2$, donc la série $\sum_n \frac{1}{n!}$ converge absolument. Calculer les sommes partielles S_1, S_2, S_3, \dots à l’aide d’une calculatrice !

Dans cette première partie du cours, nous étudions principalement des séries absolument convergentes. Pour établir la convergence absolue, les théorèmes 2.11, 2.12 et 2.13 suffisent le plus souvent. Il existent d’autres versions plus élaborées de ces théorèmes, mais il n’est pas utile de les formuler ici toutes. Pour établir la divergence d’une série, il suffit souvent (mais pas toujours !) de montrer que le terme général u_n ne converge pas vers 0 (cf. 2.6). Un critère utile est la comparaison série-intégrale (cf. TD), ainsi que le suivant :

2.15. Théorème (Équivalence). Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries réelles, et soit v_n non-nulle et de signe constant. Si $u_n \sim v_n$ quand $n \rightarrow \infty$ (i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), alors les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Exemple : $v_n = \frac{1}{n^2+n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Chapitre 3 : La fonction exponentielle

Le lecteur oubliera temporairement ses connaissances éventuelles sur la fonction exponentielle : motivé par l'exemple 1.4, nous allons la (re-)définir et étudier de façon rigoureuse.

3.1. Théorème (La série exponentielle). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ converge absolument. Sa limite est notée $\exp(x)$ ou e^x .*

Remarque. À la page http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_exponentielle on trouve une illustration montrant comment les sommes partielles S_0, \dots, S_8 approchent e^x .

Exercice. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

3.2. Théorème (Équation fonctionnelle). *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

3.3. Corollaire (Homomorphisme de groupes). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \cdot e^{-z} = 1$, ainsi $e^z \neq 0$. Les applications suivantes sont donc bien définies:*

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^{\times}, & z &\mapsto e^z, \\ \exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{\times}, & t &\mapsto e^t, \end{aligned}$$

et ce sont des homomorphismes de groupes (de $(\mathbb{K}, +)$ vers $(\mathbb{K}^{\times}, \cdot)$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Le théorème 3.2 est le résultat clé de ce chapitre. Pour le prouver, il faut multiplier les deux séries $\sum_n \frac{1}{n!} z^n$ et $\sum_n \frac{1}{n!} w^n$, puis comparer le résultat avec $\sum_n \frac{1}{n!} (z+w)^n$. Cette comparaison repose sur des propriétés générales des séries absolument convergentes que nous allons traiter plus en détail dans le chapitre suivant.

3.4. Théorème (Positivité de l'exponentielle). *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(t) > 0, \quad \overline{\exp z} = \exp(\bar{z}).$$

3.5. Théorème (Dérivée de l'exponentielle réelle).

- (a) *La fonction $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$ est continue.*
- (b) *La fonction $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$ est différentiable, et $\exp' = \exp$.*
- (c) *La fonction $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$ est de classe C^{∞} et $\exp^{(k)} = \exp$.*

La preuve repose de façon essentielle sur l'équation fonctionnelle, et elle donne une excellente occasion de revoir les définitions d'une fonction *continue* et d'une fonction *différentiable*. De plus, les mêmes arguments montrent:

3.6. Théorème (Dérivée de l'exponentielle complexe).

- (a) *La fonction $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ est continue.*
- (b) *La fonction $f := \exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ est \mathbb{C} -différentiable (on dit aussi : holomorphe) au sens suivant : pour tout $z \in \mathbb{C}$, la limite*

$$f'(z) := \lim_{\mathbb{C} \ni w \rightarrow 0, w \neq 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

existe, et avec cette définition, on a $(\exp_{\mathbb{C}})'(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z)$.

3.7. Corollaire. La fonction $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est monotone et bijective.

Attention : on verra plus tard que $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ est surjective, mais non injective.

3.8. Théorème (Solution d'équation différentielle). Soient $a, c \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f' = af$ et $f(0) = c$, à savoir $f(x) = ce^{ax}$.

L'exponentielle matricielle. L'exponentielle réelle ou complexe admet plusieurs généralisations importantes, souvent liées à des équations différentielles "ordinaires".

3.9. Théorème (Exponentielle d'une matrice). Soit $A \in M(m, m; \mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors chaque coefficient $(S_n)_{ij}$ de la suite de matrices

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$$

est une série absolument convergente, et ainsi la limite $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, dite exponentielle matricielle, existe dans $M(m, m; \mathbb{R})$.

Pour comprendre l'exponentielle matricielle, il est indispensable de calculer e^A pour quelques exemples de matrices (par exemple, diagonales, triangulaires, etc. – cf. TD).

3.10. Théorème (Équation fonctionnelle). Si $AB = BA$ (i.e., A et B commutent), alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. En particulier, $e^A \cdot e^{-A} = 1_m$ (matrice unité), et ainsi la matrice e^A est inversible avec matrice inverse e^{-A} . L'application $\exp : M(m, m; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{R})$, $A \mapsto e^A$ est donc bien définie.

La condition $AB = BA$ permet d'écrire $(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$, et de prouver par récurrence que la formule du binôme de Newton reste valable pour $(A + B)^k$. En utilisant ceci, la preuve de 3.10 est la même que celle pour l'exponentielle classique.

Chapitre 4 : Séries absolument convergentes

Une propriété fondamentale des sommes usuelles est la commutativité de l'addition : $a+b = b+a$. On pourrait alors penser que la somme (i.e., la limite) d'une série convergente reste inchangée quand on modifie l'ordre de sommation des termes. C'est un fait surprenant de constater qu'il n'en est rien :

4.1. Théorème de réarrangement de Riemann. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série réelle semi-convergente (i.e., convergente, mais pas absolument convergente), et soit $s \in \mathbb{R}$. Alors il existe un réarrangement de la série qui converge vers s , i.e. : il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (une permutation de \mathbb{N}) telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ converge vers s .

4.2. Théorème (Permutation d'indices). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série (réelle ou complexe) absolument convergente, et soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une permutation. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ est, elle aussi, absolument convergente, et les deux limites coïncident.

4.3. Remarque. Mis ensemble, les deux théorèmes affirment que, *une série réelle est absolument convergente, si et seulement si, tout réarrangement de la série converge vers la même limite*. Cela reste vrai pour des séries complexes : en effet, comme

$$|u_n| \leq |\Re u_n| + |\Im u_n|, \quad |\Re u_n| \leq |u_n|, \quad |\Im u_n| \leq |u_n|,$$

une série complexe $\sum_n u_n$ est absolument convergente ssi les séries réelles $\sum_n \Re(u_n)$ et $\sum_n \Im(u_n)$ sont absolument convergentes.

4.4. Définition ou rappel. Un ensemble I est dit dénombrable si “on peut numérotter ses éléments”, i.e., s’il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \rightarrow I$ (dit un dénombrement). Si $\phi' : \mathbb{N} \rightarrow I$ est un autre dénombrement, alors $\sigma := \phi^{-1} \circ \phi'$ est une permutation de \mathbb{N} . Ainsi, si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels ou complexes indexée par I , la série $\sum_{i=0}^{\infty} u_{\phi(i)}$ converge absolument si, et seulement si, c’est le cas de $\sum_{i=0}^{\infty} u_{\phi'(i)}$. Nous écrivons alors $\sum_{i \in I} u_i$ pour sa limite, et nous dirons que la série $\sum_{i \in I} u_i$ converge absolument.

4.5. Exercice ou rappel. L’ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (l’ensemble des points à coordonnées entières non-négatives dans le plan) est dénombrable. Un dénombrement peut être représenté graphiquement, en numérotant les points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans le plan : par exemple, on peut numérotter ces points “de façon rectangulaire”, ou “de façon triangulaire” (en regroupant les indices (m, n) selon les diagonales $m+n = k$ avec $k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Exercice : montrer que l’application réciproque de ce dernier dénombrement est donnée par la formule

$$\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto n + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}.$$

Exercice : montrer aussi que \mathbb{N}^k et \mathbb{Z} sont dénombrables. Remarque : \mathbb{Q} est dénombrable, mais on sait que \mathbb{R} n’est pas dénombrable (“procédé diagonal de Cantor”).

4.6. Théorème de Fubini pour les séries doubles. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille de nombres réelles ou complexes (dite une suite double). Alors sont équivalentes :

- (1) La série double $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{n,m}$ converge absolument vers une limite L ;
- (2) pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la série $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|$ converge vers une limite notée A_n , et la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge (alors les limites $a_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$ et $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existent);
- (3) pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|$ converge vers une limite notée B_m , et la série $\sum_{m=0}^{\infty} B_m$ converge (alors les limites $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$ et $S' := \sum_{m=0}^{\infty} b_m$ existent).

Si ces propriétés sont vérifiées, alors les trois limites coïncident : $L = S = S'$, i.e.,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right).$$

Ce résultat est à voir en analogie avec l’important théorème de Fubini en théorie d’intégration, qui dit que (sous une hypothèse de convergence)

$$\iint_{A \times B} f(a, b) da db = \int_A \left(\int_B f(a, b) db \right) da = \int_B \left(\int_A f(a, b) da \right) db.$$

En effet, dans le cours théorie de la mesure (L3) on verra que ces deux résultats sont des cas particuliers d’un même théorème général. Attention : en général, il faut être prudent en effectuant une opération qui consiste à intervertir deux limites ! Par exemple, pour une série double qui ne vérifie pas (1), comme par exemple celle de terme général $u_{n,m} = 0$

pour $n = m$ et $u_{n,m} = \frac{1}{m^2 - n^2}$ si $n \neq m$, les limites dans (2) et (3) peuvent exister sans être égales (ou encore, l'une existe, mais non l'autre).

4.7. Théorème (Produit de séries absolument convergentes). Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries absolument convergentes, et posons $w_n := \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ converge absolument, et sa limite est

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

Pour la preuve, il suffit d'appliquer le théorème de Fubini à la suite double $u_{n,m} := u_n \cdot v_m$, en utilisant le dénombrement "triangulaire" décrit en 4.5. Finalement, dans le cas particulier $u_n = \frac{x}{n!}$, $v_m = \frac{y}{m!}$, ce théorème ensemble avec la formule du binôme pour $(x + y)^n$ nous donne l'équation fonctionnelle $e^{x+y} = e^x e^y$.

Chapitre 5 : Les fonctions hyperboliques et trigonométriques

A. Fonctions hyperboliques. Heuristique. Ces fonctions sont des solutions de l'équation différentielle $f'' = f$. Si on pose $g := f'$, la condition $f'' = f$ est équivalente aux deux conditions

$$\left. \begin{array}{l} f' = g \\ g' = f \end{array} \right\}.$$

5.1. Théorème (Solution de $f'' = f$). Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' = f$ et $f(0) = a$, $f'(0) = b$, à savoir

$$f(x) = \frac{a+b}{2} e^x + \frac{a-b}{2} e^{-x}.$$

Preuve. Unicité : étant donnée f , poser $\phi := f + f'$ et $\psi = f - f'$. Alors $\phi' = f' + f'' = f' + f = \phi$, $\phi(0) = a + b$, et $\psi' = -\psi$, $\psi(0) = a - b$. Le théorème 3.8 implique que $\phi(x) = (a + b)e^x$ et $\psi(x) = (a - b)e^{-x}$, ce qui donne f comme dans l'énoncé. Existence : vérification immédiate !

5.2. Définition. Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies par

$$\text{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

5.3. Théorème. Les fonctions sh et ch sont données par les séries

$$\text{sh}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1}, \quad \text{ch}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} x^{2j}$$

qui convergent absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$, elles sont \mathbb{C} -différentiables et elles satisfont le système d'équations différentielles $\text{ch}' = \text{sh}$, $\text{sh}' = \text{ch}$ avec condition initiale $\text{ch}(0) = 1$, $\text{sh}(0) = 0$.

Remarque : les règles basiques du calcul différentiel sur \mathbb{C} sont les mêmes que sur \mathbb{R} , par exemple, $(f + g)' = f' + g'$, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, etc., de sorte que les équations $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$ sont bien vérifiées sur \mathbb{C} .

Étude des fonctions ch et sh sur \mathbb{R} : sh est impaire, monotone, et bijective $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; ch est paire, et sa restriction à \mathbb{R}^+ (resp. à \mathbb{R}^-) est monotone et bijective $\mathbb{R}^\pm \rightarrow [1, \infty[$.

B. Fonctions trigonométriques. Heuristique. L'équation différentielle $f'' = -f$ joue un rôle fondamental en physique car elle décrit l'oscillateur harmonique. Elle équivaut au système

$$\left. \begin{array}{l} f' = g \\ g' = -f \end{array} \right\}.$$

Comme $c^2 \geq 0$ dans \mathbb{R} , aucune des fonctions $f(x) = e^{cx}$ avec $c \in \mathbb{R}$ n'est une solution, ainsi on ne peut pas recopier la preuve donnée ci-dessus.

5.4. Théorème (Solution de $f'' = -f$). Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' = -f$ et $f(0) = a$, $f'(0) = b$.

Preuve. Unicité. Si f_1 et f_2 sont deux solutions, posons $u := f_1 - f_2$ et $v := u'$. Alors $v' = -u$, $u(0) = 0$, $v(0) = 0$. On définit le "wronskien" de u, v par

$$w(t) := u'(t)v(t) - v'(t)u(t) = v^2(t) + u^2(t).$$

Alors $w' = 2vv' + 2uu' = 2uv - 2uv = 0$, ainsi w est constante sur \mathbb{R} . La constante est $w(0) = v^2(0) + u^2(0) = 0$, donc $v^2(t) + u^2(t) = 0$ pour tout t , donc $v(t) = 0 = u(t)$, donc $f_1 = f_2$. Existence. Le plus simple est d'utiliser l'exponentielle complexe : pour $x \in \mathbb{R}$, la partie réelle de e^{ix} est $\cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, et sa partie imaginaire $\sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. En utilisant le théorème 3.6 (b), on trouve que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, d'où $\cos'' = -\cos$, et comme $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $f := a \cos + b \sin$ est une solution.

5.5. Définition. Les fonctions sinus et cosinus sont définies par

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh}(ix), \quad \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch}(ix).$$

5.6. Théorème. Les fonctions sin et cos sont données par les séries

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}, \quad \cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}$$

qui convergent absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$, et elles satisfont le système d'équations différentielles $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ avec condition initiale $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$. Elles vérifient, pour tout $x \in \mathbb{C}$, les relations

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

5.7. Théorème. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t$ et $\sin t$ sont réelles, et on a $\Re(e^{it}) = \cos(t)$, $\Im(e^{it}) = \sin(t)$ et $|e^{it}| = 1$. L'application

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad t \mapsto e^{it}$$

est un homomorphisme de groupes : $\Phi(t+s) = \Phi(t) \cdot \Phi(s)$, $\Phi(0) = 1$.

Nous allons déterminer le noyau de l'homomorphisme Φ ,

$$\ker \Phi = \{t \in \mathbb{R} \mid \Phi(t) = 1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = 1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 1, \sin t = 0\},$$

et en déduire la périodicité des fonctions sin et cos. Le lecteur est prié d'oublier temporairement ses connaissances sur la décomposition polaire des nombres complexes : celle-ci sera rigoureusement établie en même temps. On n'admettra que les faits basiques sur \mathbb{C} (écriture $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, valeur absolue donnée par $|z|^2 = z\bar{z}$). Avant tout, nous devons donner une définition rigoureuse du nombre π ! Nous suivons ici la définition la plus courante en analyse (voir pour plus d'information : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi>, ou encore, plus encyclopédique, le livre "Autour du nombre pi" par Pierre Eymard – un éminent mathématicien nancéin – et Jean-Pierre Lafon (éd. Hermann, Paris 1999).

5.8. Lemme. *Il existe un unique nombre $\rho \in]0, 2[$ tel que $\cos(\rho) = 0$.*

On peut donner plusieurs preuves différentes : l'une consiste en une manipulation directe des séries de sin et de cos pour montrer que $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in]0, 2]$ et que $\cos(2) < 0$; on conclut alors en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et un argument de monotonie. De plus, la relation $\cos^2 \rho + \sin^2 \rho = 1$ implique alors que $\sin(\rho) = 1$, et donc $e^{i\rho} = i$, d'où $e^{2i\rho} = i^2 = -1$, $e^{3i\rho} = e^{2i\rho}e^{i\rho} = -i$, $e^{4i\rho} = i^4 = 1$.

5.9. Définition. On pose $\pi := 2\rho$ avec ρ comme dans le lemme.

5.10. Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite périodique (de période T) si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t + T) = f(t)$. La plus petite période est le plus petit nombre réel T strictement positif avec cette propriété.

5.11. Théorème. *On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{2\pi i} = 1$. Le noyau de Φ est $\ker \phi = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et les fonctions Φ , sin et cos sont périodiques de plus petite période 2π .*

5.12. Théorème. *Les applications suivantes sont bijectives :*

$$\begin{aligned} [0, 2\pi[&\rightarrow S^1, & t &\mapsto e^{it} \\ [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^\times, & (t, r) &\mapsto e^{it} e^r \\ \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z < 2\pi\} &\rightarrow \mathbb{C}^\times, & z &\mapsto e^z. \end{aligned}$$

L'homomorphisme $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est surjectif, et son noyau est $2\pi i\mathbb{Z}$.

Il est maintenant facile de déduire de ces résultats d'autres propriétés élémentaires, comme par exemple les formules pour $\sin(z + w)$, $\cos(z + w)$, la formule $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = \sin(-z)$, etc. On peut aussi montrer que la circonférence du cercle S^1 , définie comme la longueur d'arc de l'arc $[0, 2\pi[\rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{it}$, vaut 2π . Ainsi les résultats basiques de la géométrie élémentaire sont maintenant établies sur une base analytique rigoureuse.

Chapitre 6 : Remarques sur les fonctions logarithme, puissance, tangente

Ces fonctions sont en lien étroit avec l'exponentielle complexe, mais leur théorie est plus compliquée, dû au fait qu'elles ne peuvent pas être définies sur \mathbb{C} tout entier. Elles peuvent être étudiées à l'aide de séries, mais ces séries ne convergent plus pour tout $z \in \mathbb{C}$. Nous allons donc compléter l'étude de ces fonctions plus tard, après avoir développé la théorie générale des fonctions analytiques.

A. *Le logarithme.* Rappelons la définition connue dans le cas réel :

6.1. Définition. La fonction réciproque de la fonction bijective $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ s'appelle le logarithme réel, notée $\log := \log_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (autre notation courante : \ln).

Comme $\exp_{\mathbb{R}}$ est différentiable, alors la fonction réciproque $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'est elle aussi, sa dérivée est

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

Par récurrence on trouve $(\log)^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{x^k}$. Ainsi le développement de Taylor au point $x_0 = 1$ est :

$$\log(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k + R_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k + R_n(x).$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on voit que la série

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{k}$$

converge si $|x-1| < 1$, mais pour $x = 0$, c'est le négatif de la série harmonique, qui diverge ! Mais même si $|x-1| < 1$, il n'est a priori pas clair si cette série converge vers $\log(x)$.

Qu'en est-il sur \mathbb{C} ? Comme $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ n'est pas une bijection, la définition d'une "fonction réciproque" pose un problème. Nous pouvons élaborer le théorème 5.12 pour définir un logarithme sur une partie de \mathbb{C} , mais le choix de cette partie reste arbitraire :

6.2. Définition. Soit $\phi \in [0, 2\pi[$. Le plan coupé (selon l'angle ϕ) est la partie

$$\mathbb{C}_{\phi} := \{w \in \mathbb{C} \mid w = re^{it}, r > 0, t \in [0, 2\pi[, t \neq \phi\}.$$

6.3. Théorème et Définition. Par restriction, l'exponentielle définit une bijection

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \phi < \Im z < \phi + 2\pi\} \rightarrow \mathbb{C}_{\phi}, \quad z \mapsto e^z.$$

L'application réciproque, définie sur \mathbb{C}_{ϕ} , s'appelle un logarithme complexe. Elle associe à $z \in \mathbb{C}_{\phi}$ le nombre complexe

$$\log(z) = \log_{\mathbb{R}}(|z|) + i \arg(z), \quad \arg(z) \in]\phi, \phi + 2\pi[.$$

Comme le choix de ϕ est arbitraire (même si souvent on choisit $\phi = \pi$: "valeur principale"), nous n'utilisons pas l'article défini ("le" logarithme). La question se pose alors si un logarithme complexe peut être décrit par une série convergente.

B. La fonction puissance. Rappelons, là aussi, la définition connue dans le cas réel :

6.4. Définition. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance est définie par

$$f_{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\alpha} := e^{\alpha \log(x)}.$$

Elle est différentiable et vérifie $f'_{\alpha} = \alpha f_{\alpha-1}, \dots, f_{\alpha}^{(k)} = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) f_{\alpha-k}$, et

$$\frac{f_{\alpha}^{(k)}(1)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

est le coefficient binomial “ α sur k ”, et on appelle série binomiale (d’exposant α) la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k.$$

Si $|x-1| < 1$, la règle de D’Alembert montre que la série converge absolument. Soit maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et distinguons quelques cas :

a) si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la série s’arrête au rang n , et elle définit ainsi une fonction polynomiale sur \mathbb{C} tout entier, à savoir $f_n(z) = z^n = (1 + (z-1))^n$;

b) si $\alpha = -1$, la série binomiale devient la série géométrique $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ qui donne une série pour $f_{-1}(1-x)$, mais elle ne converge pas pour $x = 1$;

c) si $\alpha = \frac{1}{2}$, on sait qu’il existe toujours *deux* racines complexes de $z \in \mathbb{C}$ si $z \neq 0$, et en général il n’y a aucun choix préféré de racine. Un tel choix est toujours plus au moins arbitraire – par exemple, nous pouvons définir la “valeur principale” pour $z \in \mathbb{C}_{\pi}$:

$$z^{\alpha} := \exp_{\mathbb{C}}(\alpha \log(z)).$$

Si $\alpha = \frac{1}{n}$, on prend ainsi la racine n -ième dont l’argument est compris entre $-\frac{\pi}{n}$ et $\frac{\pi}{n}$.

C. La fonction tangente. Elle est définie par $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos(z) \neq 0$. Remarquons que $\cos(z) = 0$ ssi $e^{iz} = -e^{-iz}$, ssi $e^{2iz} = -1 = e^{\pi i}$, ainsi le théorème 5.12 implique que pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi.$$

Ainsi la fonction tangente ne peut pas être définie sur \mathbb{C} entier, et s’il existe un développement en série, ce développement ne peut pas converger sur \mathbb{C} tout entier. Motivé par ces exemples, nous allons étudier la théorie générale de fonctions définies par des séries qui convergent sur une partie de \mathbb{C} seulement.

Chapitre 7 : Séries entières

7.1. Définition. Une série entière (réelle ou complexe) est une série de la forme $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$, avec $a_k \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On appelle le point $c \in \mathbb{K}$ le centre de développement. Noter que les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k$ sont des polynômes.

7.2. Théorème (Rayon de convergence). Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ une série entière. Alors il existe un unique $\rho \in [0, \infty]$ tel que :

(i) si $|x-c| < \rho$, alors la série converge absolument ;

(ii) si $|x-c| > \rho$, alors la série diverge grossièrement.

Plus précisément, la quantité ρ est obtenue par

$$\rho = \sup\{t \in [0, \infty[: \text{la suite } (a_k t^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

7.3. Définition. La quantité $\rho := \rho_S \in [0, \infty]$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière S , et l'ensemble

$$D_S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \rho\}$$

son disque de convergence (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on parle d'intervalle de convergence). Remarque : le théorème ne dit rien sur le comportement de la série sur le "cercle d'incertitude", i.e., sur le bord du disque de convergence $\{z : |z - c| = \rho\}$. Voir le chapitre 9 à ce sujet.

7.4. Théorème. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - c)^k$ une série entière, et supposons que la limite $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe. Alors le rayon de convergence est donnée par :

$$\rho = \infty \text{ si } \ell = 0; \quad \rho = \frac{1}{\ell} \text{ sinon.}$$

Si $\ell = \infty$ (i.e., $\forall C > 0: \exists N: \forall n > N: \sqrt[n]{|a_n|} > C$), alors $\rho = 0$.

7.5. Théorème. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - c)^k$ une série entière, et supposons que la limite $\ell' := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe. Alors le rayon de convergence est donné par $\rho = \frac{1}{\ell'}$ (avec les mêmes conventions que ci-dessus).

Exemples. En utilisant 7.5, on trouve : le rayon de convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x - 1)^k$ et celui de la série binomiale (si $\alpha \notin \mathbb{N}$) est égal à 1 ; celui des séries exp, sin, cos est ∞ , et celui de $\sum_n n!x^n$ est 0. Par contre, si

$$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n},$$

ni 7.4 ni 7.5 s'appliquent : les limites ℓ , resp. ℓ' , n'existent pas. Par contre, le résultat général suivant s'applique (et donne la valeur $\rho = 1$).

7.6. Théorème (Formule de Hadamard). Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - c)^k$ une série entière, et posons

$$\sigma := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty].$$

Alors le rayon de convergence est donnée par :

$$\rho = \infty \text{ si } \sigma = 0; \quad \rho = 0 \text{ si } \sigma = \infty; \quad \rho = \frac{1}{\sigma} \text{ sinon.}$$

7.7. Définition/rappel. La limite supérieure d'une suite réelle $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup \{c_k : k \geq n\} \right).$$

La limite supérieure est aussi la plus grande parmi les limites de suite extraites convergentes de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De façon analogue, on définit la limite inférieure ; alors on a un encadrement de tous les points d'accumulation de la suite entre ces deux limites.

Nous allons montrer que, sur son disque ou intervalle de convergence, une série entière a toujours d'excellentes propriétés : continuité, différentiabilité, etc. Les preuves sont essentiellement les mêmes que celles déjà utilisées dans le cas de l'exponentielle ; techniquement, elles sont un peu plus compliquées, dû au fait qu'on ne dispose plus d'équation fonctionnelle, et qu'il faut préciser sous quelles conditions les séries convergent. Pour simplifier

les énoncés suivants, nous allons supposer que $c = 0$; le cas général s'en déduit alors par translation. Voici l'idée pour montrer que la fonction $S(x) = \sum_n a_n x^n$ est différentiable dans son disque de convergence : on développe le quotient de différences

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{\sum_n a_n (x+h)^n - \sum_n a_n x^n}{h},$$

on simplifie le numérateur, on le factorise par h , on simplifie avec le dénominateur ; après, on peut passer sans problème à la limite. L'étape cruciale ici est le développement de $S(x+h)$, qui fait l'objet du résultat suivant :

7.8. Théorème (Changement du centre de développement). *Soit $S = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et soit D_S son disque de convergence. Alors, pour $x \in D_S$ fixé, la fonction*

$$h \mapsto S(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^n$$

est donnée par une série $\tilde{S}(h) = \sum_n b_n h^n$ dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à $\rho - |x|$ (qui est positif). Les coefficients b_n sont obtenus par le développement de $S(x+h)$ en puissances de h :

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x^{n-k},$$

en particulier, on trouve que $b_0 = S(x)$ et $b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

La preuve utilise le théorème de Fubini (thm. 4.6) pour justifier le développement

$$S(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

7.9. Théorème ("Dérivabilité terme à terme"). *Soit $S = \sum_n a_n x^n$ une série entière et D_S son disque de convergence. Alors la fonction $S : D_S \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^∞ (au sens usuel, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et au sens \mathbb{C} -différentiable, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). La dérivée k -ième est donnée, pour tout $x \in D_S$, par la série absolument convergente*

$$S^{(k)}(x) := \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

La preuve est simple en utilisant le théorème 7.5. : pour $h \neq 0$,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{\tilde{S}(h) - \tilde{S}(0)}{h} = \frac{b_1 h + b_2 h^2 + \dots}{h} = b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \dots$$

et on montre facilement que $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n h^{n-1}$ existe et vaut b_1 . Ainsi S est différentiable avec dérivée $S' = S^{(1)}$; la série de $(S')' = S^{(2)}$ s'en déduit, etc. (récurrence).

7.10. Corollaire. *Avec les notations du théorème, nous avons $S^{(k)}(0) = k! a_k$, et ainsi $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$. Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la série $\sum_k a_k x^k$ coïncide donc avec la série de Taylor*

usuelle de S (i.e., pour $n \rightarrow \infty$, le terme reste $R_n(x)$ du développement de Taylor converge vers 0, pour tout $x \in D_S$).

Ceci montre aussi que les propriétés (1) et (2) du lemme 1.2 sont équivalentes.

7.11. Corollaire. *Les coefficients a_k d'une série entière convergente sont uniquement déterminés par la fonction $S : D_S \rightarrow \mathbb{C}$: si $\sum_n a_n x^n = \sum_n c_n x^n$ pour x au voisinage de 0, alors $a_n = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

7.12. Corollaire. *Soit $S = \sum_n a_n x^n$ une série entière et D_S son disque de convergence. Alors la fonction $S : D_S \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive, i.e., une fonction $f : D_S \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f' = S$. Par exemple, une primitive est donnée par la série convergente*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

On sait que, sur un intervalle réel, une primitive est unique à une constante près. Il en est de même sur un disque complexe :

7.13. Lemme. *Soit $B_r(x_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_0| < r\}$ le disque de centre x_0 et de rayon $r > 0$, et $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (\mathbb{C} -différentiable) telle que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in B_r(x_0)$. Alors f est constante.*

La preuve consiste à se ramener au cas réel : d'abord, en décalant, on se ramène au cas $x_0 = 0$. Ensuite, soit $w \in B_r(x_0)$, et on pose $\gamma(t) := f(tw)$ et $u(t) := \Re \gamma(t)$, $v(t) := \Im \gamma(t)$ pour $t \in [0, 1]$. Alors, pour $h \rightarrow 0$, la limite

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \frac{f(tw+hw) - f(tw)}{h} = w \frac{f(tw+hw) - f(tw)}{hw}$$

existe car f est \mathbb{C} -différentiable, et elle vaut $w f'(tw) = 0$. Il s'ensuit que $u'(t) = 0$ et $v'(t) = 0$, donc $\gamma(t)$ est constante = $\gamma(0)$, donc $f(w) = f(0)$, et f est constante.

Le lemme implique clairement que deux primitives de S sur D_S se distinguent seulement par une constante. Ces résultats donnent une méthode simple pour développer des fonctions élémentaires en une série, dès qu'on connaît la série de la dérivée, ou une équation différentielle en lien avec la fonction en question. Considérons les exemples du chapitre précédent :

A. *Le logarithme.* La série géométrique $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ converge pour tout $z \in D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et alors $S(z) = \frac{1}{1+z}$. Ainsi $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$ est une primitive de S . Or, la valeur principale du logarithme $\log : \mathbb{C}_\pi \rightarrow \mathbb{C}$ donne une autre primitive : $z \mapsto \log(1+z)$, et comme $f(0) = 0 = \log(1)$, l'unicité de la primitive sur D entraîne que $f(z) = \log(1+z)$, d'où :

7.14. Théorème. *Pour tout $x \in D = B_1(0)$, on a $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ (série absolument convergente), où \log est la valeur principale définie sur le plan coupé \mathbb{C}_π .*

B. *La fonction puissance.* Le procédé suit de près l'exemple précédent : soit $S_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ la série binomiale. Elle converge absolument pour $x \in D$. En calculant $S'_\alpha(x)$ et en utilisant des propriétés des coefficients binomiaux, on trouve que

$$(1+x)S'_\alpha(x) = \alpha S_\alpha(x).$$

Or, la fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ satisfait la même équation différentielle :

$$(1+x)f'_\alpha(1+x) = \alpha f_\alpha(1+x).$$

Ainsi, si on pose $F(x) := \frac{S_\alpha(x)}{f_\alpha(1+x)}$, on trouve que $F'(x) = 0$ sur D , ainsi F est constante ; cette constante vaut 1, d'où finalement

7.15. Théorème. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in D = B_1(0)$, on a

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(série absolument convergente), où z^α est la valeur principale définie sur \mathbb{C}_π .

C. Les fonctions arctangente et arcsin. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On montre comme classiquement que les fonctions $\tan :] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\sin :] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow] - 1, 1[$ sont bijectives, et que les fonctions réciproques, arctan et arcsin, fournissent des primitives de $(1+x^2)^{-1}$, resp. de $(1-x^2)^{-1/2}$. En développant ces dernières fonctions en séries (sur $] - 1, 1[$ la série géométrique donne $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, et dans l'autre cas on utilise la série binomiale avec $\alpha = -1/2$), et en intégrant terme à terme, on trouve

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

et similairement pour le développement de arcsin (sur $] - 1, 1[$) ; cf. TD. On notera que, bien que la fonction arctan puisse être définie sur \mathbb{R} entier, la série ne converge pas sur \mathbb{R} tout entier.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ces séries convergent sur D , et on peut faire une étude plus fine pour montrer que, là aussi, elles définissent des fonctions réciproques à la tangente, resp. au sinus.

Chapitre 8 : Fonctions analytiques

Une fonction analytique est une fonction qui, localement (i.e., au voisinage de chaque point où elle est définie), est donnée par une série entière convergente. Dans la suite, soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} et $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{K}$. (Rappel : une partie $U \subset \mathbb{K}$ est dite ouverte si, pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le disque (resp. l'intervalle) $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ appartient à U . Exemples de parties ouvertes : $U = B_r(c)$; le plan coupé ; \mathbb{C}^\times .)

8.1. Définition. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ est dite \mathbb{K} -analytique (ou : de classe C^ω) si, pour tout $x_0 \in U$, il existe une série entière et $r > 0$ tel que $B_r(x_0) \subset U$ et pour tout $x \in B_r(x_0)$, cette série converge vers $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Les propriétés "locales" d'une fonction analytique f sont donc les mêmes que celles d'une série entière convergente; par exemple :

8.2. Théorème ("C $^\omega$ \Rightarrow C $^\infty$ "). Toute fonction analytique est de classe C^∞ sur \mathbb{K} .

Nous avons vu (exemple 1.1) que la réciproque est fautive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il se pose donc la question de savoir comment on peut reconnaître les fonctions C^ω parmi les fonctions C^∞ – voir remarques à la fin du chapitre.

8.3. Exemples.

(1) La partie $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est ouverte dans \mathbb{C} , et la fonction $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est analytique. En effet, soit $x_0 = c \in \mathbb{C}^\times$. Alors on a (avec rayon de convergence égal à $|c| > 0$) :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c + (x - c)} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \frac{x-c}{c}} = \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-c}{-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n c^{n+1}} (x - x_0)^n$$

(2) La fonction exponentielle $\exp_{\mathbb{C}}$ est analytique. En effet, pour obtenir son développement par rapport au centre c , on écrit

$$\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{C}}(c + (x - c)) = \exp_{\mathbb{C}}(c) \cdot \exp_{\mathbb{C}}(x - c) = e^c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - c)^n.$$

Exercice : procéder de façon analogue pour $\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ (en utilisant leurs équations fonctionnelles).

(3) Le logarithme $\log_{\phi} : \mathbb{C}_{\phi} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique. Remarquons d'abord que le plan coupé \mathbb{C}_{ϕ} est ouvert dans \mathbb{C} , ainsi pour tout $x_0 = c \in \mathbb{C}_{\phi}$ il existe $\varepsilon > 0$ (forcément $\varepsilon < |c|$), tel que $B_{\varepsilon}(c) \subset \mathbb{C}_{\phi}$. Ainsi on peut intégrer terme à terme le développement, centré en c , de $\frac{1}{x}$ donné ci-dessus. La constante d'intégration est déterminée en prenant la valeur de la série au point $x = c$. Par unicité de la primitive sur le disque $B_{\varepsilon}(c)$ (Lemme 7.10), il s'ensuit que

$$\log(x) = \log_{\mathbb{R}}(|c|) + i \arg(c) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x-c}{-c}\right)^{n+1}, \quad \arg(c) \in]\phi, \phi + 2\pi[.$$

(4) La fonction $f_{\alpha} : \mathbb{C}_{\phi} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{\alpha} = e^{\alpha \log_{\phi}(z)}$ est analytique. Son développement de centre z_0 s'obtient en écrivant

$$z^{\alpha} = (z - z_0 + z_0)^{\alpha} = z_0^{\alpha} \left(\frac{z - z_0}{z_0} + 1\right)^{\alpha}$$

et en utilisant le développement de $(x + 1)^{\alpha}$. Le point crucial est, dans tous les cas, le changement du centre du développement. En général, c'est une question délicate. Mais si U est un disque de convergence, le théorème 7.8 implique directement :

8.4. Théorème. Soit $S(x) := \sum_n a_n (x - c)^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors la fonction $S : D_S \rightarrow \mathbb{K}$ est analytique.

8.5. Exemples.

(1) On retrouve le fait que \exp, \cos, \sin sont analytiques sur \mathbb{C} (car $\rho = \infty$).

(2) Tout polynôme (= série entière finie) est analytique sur \mathbb{C} (car $\rho = \infty$).

(3) Le rayon de convergence de $f(x) := \sum_n \frac{1}{(n+1)!} x^n$ est égal à ∞ . Cette fonction est donc analytique sur \mathbb{C} . Pour $x \neq 0$, elle vaut $\frac{e^x - 1}{x}$.

(4) De même, on constate que la série $f(x) := \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ définit une fonction analytique sur \mathbb{C} . Pour $x \neq 0$, elle vaut $\frac{\sin(x)}{x}$.

(5) Les méthodes précédentes ne permettent pas encore de traiter l'exemple de la fonction tangente. Pour cela, montrons que les produits, sommes, composées de fonctions analytiques sont encore analytiques :

A. Sommes et multiples. Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions \mathbb{K} -analytiques et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les fonctions $f + g : U \rightarrow \mathbb{K}$ et $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{K}$ le sont aussi, et si $f(x) = \sum_n a_n(x - c)^n$, $g(x) = \sum_n b_n(x - c)^n$, on a $(f + g)(x) = \sum_n (a_n + b_n)(x - c)^n$ et $\lambda f(x) = \sum_n \lambda a_n(x - c)^n$. Ainsi les fonctions analytiques $U \rightarrow \mathbb{K}$ forment un espace vectoriel sur \mathbb{K} , noté $C^\omega(U, \mathbb{K})$.

B. Produits. Soient f, g comme ci-dessus. D'après le théorème 4.7, le produit (parfois appelé produit de Cauchy)

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - c)^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

converge absolument si c'est le cas de chaque facteur. Ainsi le produit $f \cdot g$ est analytique. On dit aussi que l'espace $C^\omega(U, \mathbb{K})$ des fonctions \mathbb{K} -analytiques est une \mathbb{K} -algèbre. (Exercice : montrer que, si U est un disque et si $f \cdot g = 0$, alors $f = 0$ et $g = 0$; on dit que l'algèbre $C^\omega(U)$ est intègre. Montrer que ceci est en défaut pour les fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)

C. Carrées, cubes,... Du point B on déduit que les fonctions $f^2 = f \cdot f$ et $f^3 = f^2 \cdot f$, etc., sont analytiques, et on a le développement en série

$$f^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x - c)^n, \quad \text{avec } a_n^{(k)} = \sum_{(m_1, \dots, m_k) : \sum_{i=1}^k m_i = n} a_{m_1} \cdots a_{m_k}.$$

Remarquons que, si $f(c) = 0$, i.e., $a_0 = 0$, alors le plus bas terme de f^k est d'ordre k , et alors la somme porte en réalité sur $n = k, \dots, \infty$.

D. Composée (substitution).

8.6 Théorème (Composée de fonctions analytiques). Soient $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : U' \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions \mathbb{K} -analytiques telles que $f(U) \subset U'$. Alors la fonction $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{K}$ est \mathbb{K} -analytique.

En effet, soit $c \in U$, $f(x) = \sum_n a_n(x - c)^n$, donc $f(c) = a_0 =: d$, et $g(y) = \sum_n b_n(y - d)^n$, alors on développe, en utilisant le théorème de Fubini (4.4),

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(f(x) - d)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n - d \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - c)^n \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{(k)}(x - c)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - c)^m \quad \text{avec } c_m = \sum_{j=1}^m b_j a_m^{(j)} \end{aligned}$$

E. Quotients.

8.7. Théorème (Quotient de fonctions analytiques). Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{K}$ analytiques et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Alors $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{g(x)}{f(x)}$ sont analytiques sur U .

En effet, on a vu que $h(x) := \frac{1}{x}$ est analytique sur \mathbb{K}^\times , et d'après le théorème 8.6, $h \circ f(x) = \frac{1}{f(x)}$ est analytique sur U , et donc $\frac{g}{f}(x) = g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ l'est aussi.

En pratique, on détermine souvent les coefficients de $\frac{g}{f}(x) = \sum_n c_n(x-c)^n$ à partir de $f(x) = \sum_n a_n(x-c)^n$ et $g(x) = \sum_n b_n(x-c)^n$ "par comparaison":

$$\sum_n b_n(x-c)^n = \sum_n c_n(x-c)^n \cdot \sum_n a_n(x-c)^n,$$

donc $b_n = \sum_{k=0}^n c_k a_{n-k}$. Ceci donne un "système triangulaire" d'équations

$$c_0 a_0 = b_0, \quad c_1 a_0 + c_0 a_1 = b_1, \quad c_2 a_0 + c_1 a_1 + c_0 a_2 = b_2, \quad \dots$$

qu'on peut résoudre de proche en proche pour trouver c_0, c_1, \dots

8.8. Exemples.

(1) Toute fraction rationnelle $\frac{p(x)}{q(x)}$ (p, q polynômes) est analytique (sur le domaine de définition $U = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$). On développera, par exemple (exercice : TD),

$$f(x) := \frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

en une série autour de $x_0 = 0$: on trouve une relation de récurrence remarquable pour les coefficients c_n (suite de Fibonacci). En factorisant le polynôme $q(x) = 1 - x - x^2 = -(x-a)(x-b)$, on peut écrire f aussi sous la forme $f(x) = c(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b})$ avec une constante c , et en développant ceci, on trouve une formule explicite pour c_n , à savoir

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(2) La fonction tangente $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: elle est analytique sur $U = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\}$. En écrivant $\cos(x) \tan(x) = \sin(x)$, par comparaison on trouve les premiers coefficients (exercice : calculer les 2 coefficients suivants)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

(3) Nous avons vu que la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n = \frac{e^x - 1}{x}$ est analytique sur \mathbb{C} . Il s'ensuit que la fonction $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{e^x - 1}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus 2\pi i \mathbb{Z}^*$. Soit $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_n c_n x^n$ son développement au voisinage de 0. On pose $B_n := n! c_n$ (nombre de Bernoulli). Ainsi les coefficients B_n sont déterminés par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1.$$

En faisant le produit de Cauchy, et en multipliant par $n!$, on obtient la formule de récurrence

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

On obtient ainsi $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$. On remarque que

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2} = \frac{x \operatorname{ch}(x/2)}{2 \operatorname{sh}(x/2)},$$

et par un argument de parité on déduit que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$. De plus, on obtient ainsi une formule explicite pour les coefficients du développement des fonctions $x \operatorname{coth}(x)$ et $x \operatorname{cotan}(x)$. Finalement, en utilisant que $\tan(x) = \operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x)$, on en déduit que

$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Chapitre 9 : Séries semi-convergentes

Soit $S(x) = \sum_n a_n(x - c)^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de disque de convergence D_S . Le bord du disque D_S est l'ensemble $\partial D_S := \{x \in \mathbb{C} \mid |x - c| = \rho\}$ (cercle de centre c et rayon ρ). Alors deux problèmes se posent :

(1) Quelle est la nature de la série $\sum_n a_n(x - c)^n$ si x appartient à ∂D_S ?

(2) Si la série converge pour un $x_0 \in \partial D_S$, quel est le lien entre sa limite et la fonction analytique $D_S \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto S(x)$?

9.1. Exemple ("séries de Riemann"). Soit $s \in \mathbb{C}$ et $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} x^n$. Noter que pour $s = u + iv$, on a $|n^{u+iv}| = n^u$. Puisque $(n^u)^{1/n} = e^{u \log n/n} \rightarrow e^0 = 1$ ($n \rightarrow \infty$) pour tout $u \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que le rayon de convergence de $S(x)$ est égal à 1, quel que soit s . Or, le comportement sur le bord du disque $B_1(0)$ dépend de s :

- si $u = \Re s > 1$: par comparaison avec une intégrale on montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge – en effet, la fonction $f(t) := t^{-u}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ , et on a la majoration

$$\sum_{n=2}^N n^{-u} \leq \int_1^N t^{-u} dt = \frac{1 - N^{1-u}}{u - 1} \leq \frac{1}{u - 1}.$$

Ainsi cette série à termes positives est bornée, donc absolument convergente pour x appartenant au bord du disque ;

- si $u = \Re s \leq 0$: le terme général de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ne converge pas vers 0, ainsi la série est divergente sur le bord du disque ;
- si $0 < u = \Re s \leq 1$: pour $x = 1$, la série diverge (car elle est minorée par la série harmonique). Pour $x = -1$, elle converge, grâce au résultat suivant :

9.2. Théorème (Critère de Leibniz). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, décroissante de limite 0. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge.

Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-u}$ pour $0 < u \leq 1$ est semi-convergente. Quant au problème (2) :

9.3. Remarque (continuité). La fonction $S : D_S \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable, donc continue. Cela veut dire que, pour tout $x_0 \in D$, $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$, i.e.,

$$\forall x_0 \in D : \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(x - c)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(x_0 - c)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^N a_n(x - c)^n.$$

On peut donc intervertir deux limites. La question (2) se précise comme suit : si la série converge pour un certain $x_0 \in \partial D_S$, est-ce qu'une telle relation reste valable ?

9.4 Théorème de convergence radiale d'Abel. Soit $S(x) = \sum_n a_n(x-c)^n$ une série entière réelle ou complexe, et soit $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_n a_n(x_0-c)^n$ converge. Alors

$$\lim_{] -1, 1[\ni t \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t(x_0-c))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-c)^n.$$

Après réduction "sans perte de généralité" au cas $c=0$, $x_0=1$, $\rho=1$ et $\sum_n a_n x_0^n = 0$, la preuve repose sur la sommation partielle d'Abel : soit $S_N := \sum_{n=0}^N a_n$ et $S_{-1} := 0$, alors

$$\forall t \in]0, 1[: \sum_{n=0}^N a_n t^n = \sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) t^n = \sum_{n=0}^N S_n (t^n - t^{n+1}) + S_N t^{N+1} = (1-t) \sum_{n=0}^N S_n t^n + S_N t^{N+1}$$

(c'est une "version discrète" de l'intégration par parties $\int f'g = -\int fg' + [fg]$). Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 0$, on en déduit que $S(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n$, puis que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|S(t)| < \varepsilon$ si $|1-t| < \delta$.

9.5. Exemples. (1) On sait que, pour $|x-1| < 1$, $\log(1+x) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$. Pour $x=1$ la série converge d'après le critère de Leibniz. Ainsi le théorème d'Abel implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{t \rightarrow 1} \log(1+t) = \log(2).$$

(On a également $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ pour tout autre x tel que $|x|=1$ et $x \neq -1$; cf; TD.)

(2) De la même façon, on utilise la série de la fonction arctg pour montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{t \rightarrow 1} \arctg(t) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(3) Si $\sum_n a_n t^n$ et $\sum_n b_n t^n$ et $\sum_n c_n t^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ convergent pour $t=1$, alors par passage à la limite $t \rightarrow 1$ (avec $t < 1$, donc convergence absolue) dans le produit de Cauchy, le théorème implique que $\sum_n a_n \cdot \sum_n b_n = \sum_n c_n$.

9.6. Remarques. Le problème de bien définir et de calculer les limites de séries semi-convergentes a occupé les analystes depuis Euler et Leibniz : la problématique provient du fait que le résultat dépend en effet de l'ordre de sommation (cf. le théorème 4.1), ainsi on perd des propriétés connues du cas des sommes finies, comme la commutativité. On peut définir et calculer ces sommes infinies de plusieurs manières différentes. Par exemple :

Définition. On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est A-sommable, avec A-limite $A \sum_n u_n$, si pour tout $|t| < 1$, la série $\sum_n t^n u_n$ converge au sens usuel et si la limite suivante existe :

$$A \sum_n u_n := \lim_{]0, 1[\ni t \rightarrow 1} \sum_n t^n u_n$$

Le théorème d'Abel dit alors que, si une série est convergente au sens usuel, alors elle est A-sommable, avec même limite. La réciproque est fautive : la série $\sum_n (-1)^n$ est

A -sommable, avec $A \sum_n (-1)^n = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}$, mais elle n'est pas convergente au sens usuel. En revanche, une réciproque *partielle* du théorème d'Abel est donnée par le théorème de Tauber : *Si la série est A -sommable et si $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$, alors la série converge au sens usuel avec même limite.* Ces théorèmes se généralisent en une classe de théorèmes ("théorèmes abéliens et tauberiens") donnant des liens entre de divers "procédés de sommation". Ces résultats ont des applications en la *théorie analytique des nombres* (c'est un autre domaine de recherche active poursuivie à Nancy).

Chapitre 10 : Convergence simple et uniforme de suites de fonctions

Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définit une suite de fonctions $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Dans ce chapitre, nous commençons à analyser des suites de fonctions quelconques $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$, définies sur un ensemble M et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Il existe plusieurs notions de convergence pour de telles suites :

- a) convergence simple,
- b) convergence uniforme,
- c) convergence en moyenne,
- d) convergence en moyenne quadratique, etc.

Elles ont toutes leur importance en analyse. Dans ce chapitre, nous étudions a) et b).

10.1. Définition. Soit M un ensemble et $(f_n : M \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{K}$, si, pour tout $x \in M$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$:

$$\forall x \in M : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dans cette formule, N dépend en général de ε et de x !

10.2. Exemple. Soit $I = [0, 1]$ et $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = 1, f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$. On observe que chacune des fonctions f_n est continue (même : polynomiale), mais la limite f ne l'est pas. Ainsi, la convergence simple n'est pas compatible avec de "bonnes" propriétés d'une fonction. On cherche alors à définir d'autres notions de convergence qui préservent mieux ces propriétés.

10.3. Définition. On dit qu'une suite $(f_n : M \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions converge uniformément vers $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Représentation graphique : pour $n \geq N$, les graphes des f_n se trouvent dans le " ε -tuyau" autour du graphe de f . La convergence uniforme implique la convergence simple (le N convient pour **tout les x à la fois**) ; la réciproque est fautive (exemple 10.2 : la convergence n'y est pas uniforme).

10.4. Lemme. *La suite de fonctions f_n converge uniformément vers f si et seulement si*

$$K_n := \sup_{x \in M} \{|f_n(x) - f(x)|\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

10.5. Théorème (Continuité d'une limite uniforme). *Soit M une partie de \mathbb{R}, \mathbb{C} ou de \mathbb{R}^n (ou d'un espace métrique quelconque), et soit $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions*

qui converge uniformément vers une fonction f . Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue [en un point $x_0 \in M$], alors f est continue [au point x_0]. Autrement dit, on a égalité de limites :

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lim_{y \rightarrow x_0} y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x_0} f_n(y).$$

La preuve est un grand classique d'analyse : soit $\varepsilon > 0$; on écrit

$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0)),$$

puis on fixe n assez grand pour majorer la valeur absolue du premier et du troisième terme par $\varepsilon/3$, et enfin on choisit x suffisamment proche de x_0 pour majorer la valeur absolue du terme au milieu par $\varepsilon/3$.

10.6. Exemples.

(1) Revenons à l'exemple 10.2 : les fonctions f_n sont continues, mais la fonction limite f étant discontinue, la convergence ne peut donc pas être uniforme.

(2) Par contre, il est faux que la continuité de la limite implique l'uniformité de la convergence. Contre-exemple : soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = 0$ si $2/n < x$, $f_n(x) = n^2x$ si $0 < x < 1/n$ et $f_n(x) = 2n - n^2x$ si $1/n \leq x \leq 2/n$. Faire un dessin et montrer que f_n est continue, et f_n converge simplement vers $f = 0$, mais la convergence n'est pas uniforme. Remarquer aussi que $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ ne tend pas vers $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

10.7. Lemme. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)) dt.$$

(3) La fonction $f_n(z) := \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} z^j$ est continue sur \mathbb{C} , ainsi que sa limite $f(z) = e^z$. Pourtant, la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{C} . Cependant, la convergence est *localement uniforme*, au sens suivant :

10.8. Définition. Soit M une partie de \mathbb{R} , \mathbb{C} ou de \mathbb{R}^n (ou d'un espace métrique quelconque), et soit $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f si tout point $x \in M$ admet un voisinage V_x tel que, restreinte à V_x , les fonctions $f_n : V_x \rightarrow \mathbb{K}$ convergent uniformément vers $f : V_x \rightarrow \mathbb{K}$. (Rappel : voisinage de x : une partie $V_x \subset M$ telle qu'il existe $r > 0$ avec $\{y \in M \mid |x - y| < r\} \subset V_x$.)

La continuité est une "propriété locale", et ainsi le théorème 10.5 reste vrai si on remplace "converge uniformément" par "converge localement uniformément".

10.9. Théorème. La suite des sommes partielles, $S_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k$, d'une série entière converge localement uniformément sur son disque de convergence.

En effet, soit $D_S = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - c| < \rho\}$ le disque de convergence. Supposons $\rho > 0$, et soit $x \in D_S$. Posons $R := \frac{|x-c|+\rho}{2}$, alors $0 < R < \rho$ et $V_x := B_R(c)$ est un disque strictement inclus dans D_S . Alors, pour tout $z \in V_x$,

$$|S(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| R^k = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \rho^k \left(\frac{R}{\rho}\right)^k \leq C \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(4) Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Exercice : la suite f_n converge uniformément vers $f(x) = |x|$. On remarque que chaque f_n est différentiable, mais la limite ne l'est pas. Ainsi la convergence uniforme préserve la continuité, mais pas la différentiabilité. Voici un critère suffisant (mais non nécessaire) pour assurer qu'une limite de fonctions différentiables est encore différentiable :

10.10. Théorème. (Convergence au sens C^1) Soit $I =]a, b[$ un intervalle avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et supposons que $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur I telle que

1) la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et

2) la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors f est de classe C^1 avec dérivée $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = f' = g = \lim_{n \rightarrow \infty} ((f_n)')$.

La preuve de ce résultat repose sur la relation fondamentale $F(b) - f(a) = \int_a^b F'(t) dt$ entre calcul différentiel et calcul intégral, qui permet d'écrire, si F est C^1 et $h \neq 0$,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \int_0^1 F'(x_0 + th) dt. \quad (\text{RF})$$

Pour f_n, f et g comme dans le théorème, en appliquant (RF) au terme du milieu, on a pour $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)}{h} + \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} + \frac{f_n(x_0) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)}{h} + \int_0^1 f'_n(x_0 + th) dt + \frac{f_n(x_0) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

On fait tendre n vers ∞ . En utilisant le Lemme 10.7 (dont les hypothèses sont vérifiées comme $f'_n \rightarrow g$ uniformément), on obtient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \int_0^1 g(x_0 + th) dt.$$

Puisque g est continue, dans le terme de droite on peut passer à la limite $h \rightarrow 0$, et on constate que $f'(x_0)$ existe et vaut $g(x_0)$.

Remarque. La conclusion du théorème reste vraie si on remplace 1) et 2) par 1) et 2') : il existe un point $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $f_n(x_0)$ converge. La convergence $f_n \rightarrow f$ sera alors forcément localement uniforme. Par récurrence, le thm. 10.10 implique:

10.11. Théorème. (Convergence au sens C^k). Soit $I =]a, b[$ un intervalle avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et supposons que $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe C^k sur I telle que, pour $j = 0, \dots, k-1$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge simplement, et pour $j = k$, uniformément, vers une fonction g_j . Alors la limite $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est aussi de classe C^k , et $f^{(j)} = g_j$.

Chapitre 11 : Espaces de fonctions, norme sup et complétude

Dans ce chapitre, nous changeons de point de vue sur les fonctions : au lieu de les regarder une par une, nous les considérons comme des éléments d'un espace de fonctions :

11.1. Lemme. Soit M un ensemble et \mathbb{K} un corps. Alors l'ensemble $V := \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ de toutes les fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} par rapport aux opérations

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Le produit de fonctions $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ définit une application bilinéaire $V \times V \rightarrow V$, $(f, g) \mapsto f \cdot g$. Par rapport aux deux opérations $+$ et \cdot , $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ est un anneau.

11.2. Définition. Une algèbre (associative) est un espace vectoriel W muni d'un produit bilinéaire (associatif) $W \times W \rightarrow W$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$. Ainsi on résume le lemme en disant que $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ est une algèbre associative et commutative.

11.3. Exercice. Si $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ est de cardinalité finie n , alors $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $f \mapsto (f(m_1), \dots, f(m_n))$ est une bijection linéaire, ainsi $\dim(\mathcal{F}(M, \mathbb{K})) = n = |M|$. Si M est de cardinalité infinie, $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ est de dimension infinie. En effet, la famille $(\delta_a)_{a \in M}$ avec $\delta_a(x) = 1$ si $x = a$ et $\delta_a(x) = 0$ sinon, est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. (Attention, elle est génératrice seulement si M est de cardinalité finie !)

11.4. Lemme. Soit $M = U$ une partie ouverte non-vide de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors les espaces suivants W sont des sous-espaces vectoriels de $V = \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$ qui sont stables par rapport au produit, donc ce sont des sous-algèbres de $V = \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$:

- (1) $C(U, \mathbb{K})$ (espace des fonctions continues) ;
- (2) $C^k(U, \mathbb{K})$ (espaces des fonctions k fois continument \mathbb{K} -dérivables) ;
- (3) $C^\infty(U, \mathbb{K})$ (fonctions C^∞) ;
- (4) $C^\omega(U, \mathbb{K})$ (fonctions analytiques) ;
- (5) $\mathbb{K}[X]$ (fonctions polynomiales, en restreignant $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto p(x)$ à U) ;
- (6) $B(U, \mathbb{K}) := \{f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{K}) \mid \exists C < \infty : \forall x \in U : |f(x)| < C\}$ (fonctions bornées) ;
- (7) $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists N \in \mathbb{N} : f(x) = 0 \text{ si } |x| > N\}$ (fonctions C^∞ à support compact ou espace des fonctions test)

Remarque, cf. feuille 1 de TD : il existe (beaucoup) de fonctions non-nulles $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par contre, si on remplace ici C^∞ par C^ω , seule la fonction $f = 0$ satisfait aux conditions. Les fonctions $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jouent, dans la théorie des distributions, le rôle des "fonctions test".

Revenons maintenant aux notions de convergence de suites de fonctions.

11.5. Définition. Pour une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), on pose

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\} = \sup_{x \in M} |f(x)| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Le lemme 10.4 dit alors :

$$f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Remarquons aussi que $\|f\|_\infty \leq C$ ssi $\forall x \in M : |f(x)| \leq C$, ainsi $\|f\|_\infty < \infty$ ssi $f \in B(M, \mathbb{K})$ (i.e., f est bornée).

11.6. Proposition. L'application $B(M, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme (dite la norme sup).

11.7. Définition (rappel). Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une norme sur V est une application $V \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|$ telle que

(N1) pour tout $f \in V$, $\|f\|_\infty \geq 0$, et $\|f\| = 0$ ssi $f = 0$;

(N2) pour tout $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$;

(N3) pour tout $f, g \in V$, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Un espace vectoriel normé (e.v.n.) sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est un espace V muni d'une norme.

Exercice. Sur $V = \mathbb{K}^n$, on a une norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. Expliquer le lien avec l'exercice 11.3 !

11.8. Théorème. (“Critère de Cauchy uniforme”) Soit $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions. Alors sont équivalentes :

(1) f_n converge uniformément vers une fonction f ;

(2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Complétude ; espaces de Banach

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être vue comme une suite d'éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. Ainsi le point de vue de suites à valeurs dans un espace vectoriel généralise la notion de suite de fonctions. Il s'avère que ce point de vue est très utile, et il permet de mettre en relief une propriété qui est fondamentale pour l'analyse : la complétude. D'abord, on définit des suites et séries convergentes comme dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

11.9. Définition. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments $v_n \in V$ est dite convergente (en norme) s'il existe $v \in V$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0$. Cet élément est alors forcément unique, et on le note $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Une série à valeurs dans V , de terme général $u_n \in V$, est la suite de ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Elle est dite convergente si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on note alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ sa limite. Une suite de Cauchy dans V est une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N : \quad \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

11.10. Lemme. Toute suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un e.v.n. V est une suite de Cauchy.

11.11. Définition. Un e.v.n. $(V, \|\cdot\|)$ est dit complet ou : un espace de Banach, si toute suite de Cauchy converge dans V . (Remarque : si V n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy qui ne converge pas ; on peut alors dire que V a un “trou” à l'endroit où la limite devait se trouver – comparer avec \mathbb{Q} qui a un “trou” en $\sqrt{2}$.)

11.12. Théorème. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et soit M un ensemble. Alors l'espace des fonctions bornées $B(U, \mathbb{K})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.

11.13. Théorème. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et U une partie de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n . Alors $V = B(U, \mathbb{K}) \cap C(U, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions bornées et continues), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.

11.14. Exemples et contre-exemples.

(1) Les espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n muni de la norme $\|x\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ sont complets.

(2) Soit $I =]-1, 1[$ et $V = C^\infty(I, \mathbb{R}) \cap B(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et lisses sur I , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est un e.v.n., mais il n'est pas complet : la suite $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ (cf. 10.9 (3)) est bien une suite de Cauchy (exercice !), mais sa limite $f(x) = |x|$ n'est pas lisse, donc n'est pas dans V . Ainsi la suite n'a pas de limite dans V !

La théorie des suites et séries à valeurs dans un espace de Banach ressemble en grande partie celle des suites et séries numériques complexes. Une raison en est que la relation entre convergence et convergence absolue est la même qu'avant (avec même preuve) :

11.15. Définition. Une série de terme général u_n dans un e.v.n. V est dite absolument convergente si la série réelle $\sum_{n=0}^\infty \|u_n\|$ converge.

11.16. Théorème. (Convergence absolue) Si une série de terme général u_n dans un espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

En particulier, pour l'espace de Banach $V = B(U, \mathbb{K})$, cela implique :

11.17. Corollaire. Soit $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions bornées telle que la série réelle $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_\infty$ converge. Alors la série des sommes partielles $F_n := \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément vers une fonction limite F .

Sous ces conditions, on dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^\infty f_n$ converge normalement.

Chapitre 12 : Séries de Fourier – notions de base

Les questions suivantes sont à l'origine de la théorie de Fourier. Rappelons (déf. 5.10)

12.1. Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est dite périodique, de période $L > 0$, si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + L) = f(x).$$

La fonction $g(x) := f(Lx)$ est alors périodique de période 1 ; ainsi on peut toujours se ramener au cas $L = 1$. Par exemple, les fonctions trigonométriques

$$\mathbf{c}_k(t) := \cos(2\pi kt), \quad \mathbf{s}_k(t) := \sin(2\pi kt), \quad \mathbf{e}_k(t) := \exp(2\pi ikt)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$, sont périodiques, de période $L = 1$: ce sont des “tonalités pures”, ou “ondes monochromatiques”, i.e., des ondes d'une seule fréquence $\frac{k}{L}$ (et de longueur d'onde $\frac{L}{k}$).

Les deux questions suivantes sont motivées par la physique :

(a) [Euler, Bernoulli, ~ 1750] Peut-on développer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique de période L , en une “superposition” (somme ou série) de tonalités pures

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \quad ?$$

Puisque $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$, on peut reformuler la question : peut-on développer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de période L , en une “superposition”

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad ?$$

(b) [Fourier, 1807] Peut-on développer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ quelconque en une “superposition continue” (une intégrale) de tonalités pures

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi itx} g(t) dt \quad ?$$

Dans les deux cas, la réponse est positive, sous des hypothèses assez générales sur f . De plus, il existe des formules relativement simples pour trouver les coefficients a_n, b_n, c_n (coefficients de Fourier), resp. la fonction g (transformée de Fourier). C’est le début d’une théorie très riche et féconde, l’analyse harmonique (un autre domaine de recherche présent à Nancy). La transformée de Fourier fera l’objet d’un autre cours. Ici, nous n’abordons que des notions élémentaires concernant la question (a). Nous supposons que $L = 1$.

12.2. Lemme. *Sommes, multiples et produits de fonctions périodiques sont périodiques, de même période. L’ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x+1)\}$ est ainsi un espace vectoriel et une \mathbb{K} -algèbre.*

12.3. Définition. Un polynôme trigonométrique complexe est une combinaison linéaire finie de fonctions \mathbf{e}_k , i.e., une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k \in S} c_k \mathbf{e}_k(x) = \sum_{k \in S} c_k e^{2\pi i k x}$$

où $S \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble fini et $c_k \in \mathbb{C}$. Un polynôme trigonométrique réel est une combinaison linéaire finie de fonctions \mathbf{c}_k et \mathbf{s}_ℓ , i.e., une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k \in S} a_k \mathbf{s}_k(x) + \sum_{k \in S'} b_k \mathbf{c}_k(x)$$

où $S, S' \subset \mathbb{N}$ sont des ensembles finis et $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ l’ensemble des polynômes trigonométriques complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), resp. réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

12.4. Exemple. (Le “noyau de Dirichlet”.) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit

$$f(t) := D_n(t) := \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} & \text{si } t \notin \mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{si } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En utilisant la somme géométrique, on montre que $f(t) = \sum_{k=-n}^n \mathbf{e}_k(t)$. Ainsi D_n est un polynôme trigonométrique. Pour un dessin des graphes de D_1, \dots, D_4 , cf. http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_kernel.

12.5. Lemme. *Les ensembles de fonctions suivants sont des sous-algèbres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) :*

- (1) $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (fonctions périodiques continues) ;
- (2) $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \cap C^k(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (fonctions périodiques de classe C^k) ;
- (3) $C^\omega(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \cap C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (fonctions périodiques analytiques) ;
- (4) $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ (polynômes trigonométriques)
- (5) $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ fonctions Riemann-intégrables périodiques.

12.6. Lemme. Pour $f, g \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, posons

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Ceci définit une forme sesquilinéaire hermitienne sur $R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Sur les espaces $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, $C^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, $C^\omega(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, cette forme est positive, et y définit ainsi un produit scalaire.

12.7. Théorème (Relations d'orthogonalité). Pour les fonctions $\mathbf{s}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{e}_n$ définies ci-dessus, on a (avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, le symbole de Kronecker) :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : \quad \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{n,m},$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : \quad \langle \mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{n,m}, \quad \langle \mathbf{s}_n, \mathbf{c}_m \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{n,m}, \quad \langle \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0 \rangle = 1.$$

12.8. Corollaire. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, la famille $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre, et dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, la famille $(\mathbf{c}_n, \mathbf{s}_m)_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

Rappelons qu'une base est une famille libre et génératrice. Les familles du corollaire précédent, sont-elles génératrices ? Elles le sont dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, par définition des polynômes trigonométriques, mais non dans les autres espaces.

12.9 Lemme. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Alors f s'écrit, de façon unique, comme somme finie

$$f = \sum_{k \in S} c_k \mathbf{e}_k = \sum_{k \in S} \langle f, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

En effet, si $f = \sum_{k \in S} c_k \mathbf{e}_k$, alors

$$\langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{k \in S} c_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle = c_n.$$

Idem, si $f = \sum_{n \in S} a_n \mathbf{c}_n + \sum_{n \in S'} b_n \mathbf{s}_n$, alors $a_n = 2\langle f, \mathbf{c}_n \rangle$, $b_n = 2\langle f, \mathbf{s}_n \rangle$ et $a_0 = \langle f, 1 \rangle$. Ceci motive la définition suivante pour une fonction "quelconque" :

12.10. Définition. Soit $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Ses coefficients de Fourier (complexes) sont, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) := \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Si $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, on définit les coefficients de Fourier réels, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$a_0(f) := \langle f, \mathbf{c}_0 \rangle = \int_0^1 f(t) dt,$$

$$a_n(f) := 2\langle f, \mathbf{c}_n \rangle = 2 \int_0^1 f(t) \cos(2\pi n t) dt,$$

$$b_n(f) := 2\langle f, \mathbf{s}_n \rangle = 2 \int_0^1 f(t) \sin(2\pi n t) dt.$$

Noter que $c_0(f) = a_0(f)$ est la moyenne de f sur une période. Le spectre de f est l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid c_n(f) \neq 0\}$ des fréquences intervenant dans f .

Exemple. Si $f = D_n$ est le noyau de Dirichlet, son spectre est $S = \{-n, \dots, n\}$. Si $f = \mathbf{e}_n$ alors $S = \{n\}$.

Dans la suite, nous utiliserons souvent la remarque suivante : si f est périodique, alors la relation de Chasles implique que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_y^{1+y} f(t) dt = \int_0^1 f(t-y) dt,$$

ainsi $c_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e^{-2\pi int} dt$, $a_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \cos(2\pi nt) dt$ et $b_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sin(2\pi nt) dt$. Par conséquent, si f est paire, alors $b_n = 0$ et $2c_n = a_n$, si f est impaire, $a_n = 0$ et $2c_n = ib_n$.

12.11. Théorème (Règles de calcul). Soient $f, g \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Alors :

- (1) $c_k(f+g) = c_k(f) + c_k(g)$, $c_k(\lambda f) = \lambda c_k(f)$;
- (2) si f est de classe C^1 : $c_k(f') = 2\pi ik \cdot c_k(f)$;
- (3) soit $\tau_y f(t) = f(t+y)$ la translatée de f par y , alors $c_k(\tau_y f) = e^{2\pi i y k} c_k(f)$;
- (4) soit $(f * g)(x) := \int_0^1 f(x-y)g(y)dy$ (convolution), alors $c_k(f * g) = c_k(f) \cdot c_k(g)$;
- (5) si f est réelle (i.e., $\bar{f} = f$), alors $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$;
- (6) si f est paire, alors $c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{1}{2}a_n(f)$,
si f est impaire, alors $c_n(f) = -c_{-n}(f) = \frac{i}{2}b_n(f)$.

12.12. Exemples. Dans la suite, on définit f pour $t \in [0, 1[$, et on prolonge par périodicité. On demande au lecteur de dessiner le graphe de f pour chaque exemple !

(1) **“La scie”**. $f(t) = \pi(\frac{1}{2} - t)$. La fonction est réelle et impaire ; elle n’est pas continue. Coefficients de Fourier : $b_k(f) = -2ic_k(f) = \frac{1}{k}$ pour $k > 0$ (intégration par parties).

(2) **“La chaîne parabolique”**. $g(x) = \pi^2(x^2 - x + \frac{1}{6})$ sur $[0, 1[$. La fonction est réelle et paire ; elle est continue, et de classe C^1 sur $]0, 1[$. Sa moyenne sur $[0, 1]$ est 0. Coefficients de Fourier : $c_0(g) = a_0(g) = 0$, $a_k(g) = 2c_k(g) = \frac{1}{k^2}$ pour $k > 0$.

(3) **“La bosse rectangulaire”**. Soit $a \in [0, 1]$ fixé et $h(x) = 1$ si $0 < x \leq a$, $h(x) = 0$ si $a < x < 1$ (fonction indicatrice de $[0, a]$). La fonction est réelle et non-continue. Coefficients de Fourier : $c_0(h) = a$, $c_k(h) = i \frac{e^{-2\pi i k a} - 1}{2\pi k}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$

(4) **“La bosse rectangulaire translatée”**. $h_2(x) = \tau_{a/2}h$ (indicatrice de $[-a/2, a/2]$). La fonction est réelle et paire. Coefficients de Fourier : $c_0(h_2) = a$, $c_k(h_2) = \frac{\sin(\pi k a)}{\pi k}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

12.13. Remarque. Si f est périodique de période L , par le changement de variable $x' := \frac{x}{L}$ on se ramène à une fonction de période 1 dont les coefficients de Fourier sont

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) e^{\frac{2\pi k t}{L}} dt$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{L}\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{2\pi k t}{L}\right) dt.$$

Chapitre 13 : Séries de Fourier – Convergence

Nous allons maintenant attaquer le “problème fondamental” de la théorie de Fourier : *sous quelles conditions peut-on écrire une fonction périodique f comme somme ou série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathbf{e}_n$ de fonctions trigonométriques ?*

13.1. Définition. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 1-périodique et intégrable. La série de Fourier de f est la série de fonctions $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \mathbf{e}_k$. Autrement dit, c’est la suite de ses sommes partielles

$$S_N(f) := \sum_{k=-N}^N c_k(f) \mathbf{e}_k.$$

Le “problème fondamental” s’énonce alors : *pour quelles f , la série de Fourier converge-t-elle ? et si oui, converge-t-elle vers f , et dans quel sens la convergence a-t-elle lieu ?* Avant d’aborder la théorie générale, il sera utile d’étudier “à la main” ces questions pour les exemples 12.12.

13.2 Exemples.

(0) Le noyau de Dirichlet. Si f est un polynôme trigonométrique, alors $S_N f = f$ pour tout N suffisamment grand, donc $S_n f$ converge vers f simplement et uniformément. Par exemple, c’est le cas si $f = D_n$ est le noyau de Dirichlet (exemple 12.4).

(1) La scie. Proposition : *Soit $1/2 > \delta > 0$. Alors, on a convergence uniforme pour tout $x \in [\delta, 1 - \delta]$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k} = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right).$$

Pour la preuve, on regroupe, dans le noyau de Dirichlet $D_n = \sum_{k=-n}^n \mathbf{e}_k$ (exemple 12.4), les termes $\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{-k}$:

$$D_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi kt) + 1,$$

et on intègre les deux membres entre $\frac{1}{2}$ et x . On montre que le membre de gauche, $F_n(x) := \int_{\frac{1}{2}}^x D_n(t) dt$, tend uniformément, pour $x \in [\delta, 1 - \delta]$, vers 0 si $n \rightarrow \infty$: en effet,

$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x h(t) \sin(\pi(2n+1)t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^x h'(t) \frac{\cos(\pi(2n+1)t)}{(2n+1)\pi} dt - \left[h(t) \frac{\cos(\pi(2n+1)t)}{(2n+1)\pi} \right]_{\frac{1}{2}}^x$$

avec la fonction $h(t) = \frac{1}{\sin(\pi t)}$ qui est C^1 sur $]0, 1[$. Ainsi h et h' sont bornées sur $[\delta, 1 - \delta]$, et il s’ensuit que $|F_n(x)| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, uniformément en $x \in [\delta, 1 - \delta]$, et donc

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{1/2}^x 2 \cos(2\pi kt) dt + \int_{1/2}^x 1 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{\pi k} + x - \frac{1}{2}.$$

Remarque. Pour $x = 0$ et $x = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k} = 0$. On a donc convergence simple de $S_N(f)$ sur $[0, 1]$, mais la convergence n’y est pas uniforme – sinon la limite serait continue, ce qui n’est pas le cas. De plus, si N devient grand, $S_N(f)$ présente de plus en plus nettement un “ressaut” (d’environ 9 pour cent du saut de f) près des points de discontinuité de f : c’est le phénomène de Gibbs, cf. exercice en TD, et pour une illustration : http://fr.wikipedia.org/wiki/Phénomène_de_Gibbs.

(2) **La chaîne parabolique.** Proposition : On a convergence uniforme pour $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2} = \pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right).$$

Pour la preuve, on pose $G(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kt)}{k^2}$. Comme $\sum_k \frac{1}{k^2} < \infty$, cette série est normalement convergente. De plus, d'après l'exemple précédent, sur $[\delta, 1 - \delta]$, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2\pi kt)}{k^2} \right)'$ converge uniformément. Le théorème 10.10 implique que G est de classe C^1 et qu'on peut dériver terme à terme. Ainsi l'exemple précédent implique que $G'(t) = \pi^2(2t - 1)$ sur $[\delta, 1 - \delta]$, donc $G(t) = \pi^2(t^2 - t) + C$. La constante C est déterminée en observant que $\int_0^1 G(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kt)}{k^2} dt = 0$. Ainsi on trouve que $C = \frac{\pi^2}{6}$.

Bonus. Puisque G est continue, il faut que $G(0) = C$. Cela démontre la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{B})$$

Cet exemple se généralise :

13.3. Théorème. Supposons que la série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ converge absolument (i.e., $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N |c_k|$ existe dans \mathbb{R}). Alors $\sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x}$ converge normalement, donc uniformément, vers une fonction continue f . De plus, on a $c_k(f) = c_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Application aux séries $\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k n}}{(2\pi i k)^n}$ pour $n \geq 2$, cf. TD.

(3) **La bosse rectangulaire.** Proposition. Soit h la bosse rectangulaire (exemple 12.12 (3)). Alors la série de Fourier de h converge simplement vers h en tout point où h est continue, et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé qui ne contient pas de point de discontinuité. En effet, soit f_1 la scie et $f_2(t) = f_1(1 - t)$ ("scie opposée"), puis $f_3(t) = f_2(t + a)$ sa translatée. Des résultats analogues de (1) restent vraies pour f_2 et f_3 , et aussi pour $f_1 + f_3$. Or, à des constantes près, $f_1 + f_3$ est une bosse rectangulaire. L'affirmation est donc une conséquence de (1). (Remarque. Le phénomène de Gibbs se présente également pour cet exemple.)

Les exemples montrent qu'en général on n'aura pas convergence uniforme de $S_N f$ vers f . Cela nous amène à chercher d'autres notions de convergence qui sont plus adaptées :

13.4. Définition. Pour $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, soit

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

On dit que f_n converge vers f au sens L^2 ou : en moyenne quadratique, si $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), autrement dit, si l'écart moyen quadratique entre les graphes de f_n et de f tend vers zéro. Remarque : la "norme" $\|f\| = \|f\|_2$ satisfait les propriétés

(N1) $\|f\| \geq 0$;

(N2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$;

(N3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Pour les fonctions continues, il s'agit ici de la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle f, g \rangle$ sur $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (lemme 12.6). La preuve de (N3) n'est pas triviale : elle suit exactement celle de la preuve de l'inégalité triangulaire dans un espace vectoriel euclidien quelconque (cours d'algèbre linéaire, admis ici).

13.5. Théorème (Inégalité de Bessel). Pour tout $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, on a

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2,$$

et donc $\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

et qu'on a égalité $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2$ si et seulement si $S_n(f) \rightarrow f$ au sens L^2 .

La preuve vient d'un calcul direct de $\langle f - g, f - g \rangle$ avec $g = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \mathbf{e}_k$.

13.6. Remarque ("Lemme de Riemann-Lebesgue"). Si f est Riemann-intégrable, elle est bornée, donc $\|f\|_2^2 < \infty$, donc $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 < \infty$, donc on a $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k(f) = 0$.

13.7. Exemples. Reprenons les exemples du chapitre précédent :

(1) **La scie.** Proposition : Soit $f(t) = \pi(\frac{1}{2} - t)$ la "scie" (exemple 12.12). Alors $S_n(f) \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) au sens L^2 . En effet, on vérifie par un calcul direct la condition $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2$: d'une part $\|f\|_2^2 = \int_0^1 \pi^2(\frac{1}{2} - t)^2 dt = \frac{\pi^2}{12}$. D'autre part, en utilisant (B),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2ik} \right|^2 = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{12} = \|f\|_2^2.$$

(2) **La bosse rectangulaire.** Proposition : Soit $h = 1_{[0,a]}$ la fonction définie dans l'exemple 12.12. Alors $S_n(h) \rightarrow h$ ($n \rightarrow \infty$) au sens L^2 . On peut voir ceci comme une conséquence de (1), ou en vérifiant la condition $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(h)|^2 = \|h\|_2^2$ par un calcul direct : d'une part, $\|h\|_2^2 = \int_0^a dt = a$. D'autre part,

$$|c_0(h)|^2 = a^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* : |c_k(h)|^2 = \left| \frac{e^{-2\pi ika} - 1}{2\pi k} \right|^2 = \frac{1 - \cos(2\pi ka)}{2\pi^2 k^2}.$$

Donc, en utilisant l'exemple 13.2 (2),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(h)|^2 = a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi ka)}{2\pi^2 k^2} = a^2 + \frac{1}{6} - (a^2 - a + \frac{1}{6}) = a = \|h\|_2^2.$$

Le résultat est donc vérifié pour h , mais par translation aussi pour toute "bosse translattée" (car $\|\tau_y h\|_2^2 = \|h\|_2^2$ et $|c_k(\tau_y f)|^2 = |c_k(f)|^2$ pour tout $y \in \mathbb{R}$).

(3) **Fonctions escaliers.** Rappelons qu'une fonction escalier est une combinaison linéaire finie $f = \sum_j \alpha_j 1_{I_j}$ où $I_j \subset [0, 1]$ est un intervalle. Du (2) on déduit que là aussi, $S_n(f) \rightarrow f$ au sens L^2 .

13.8. Théorème (Convergence L^2). Si $f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, alors $S_n(f) \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) au sens L^2 . Il s'ensuit que que l'inégalité de Bessel devient une égalité (égalité de Parseval)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

La preuve utilise l'exemple précédent : rappelons qu'une fonction f est R -intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier h^+ et h^- telles que

$$h^- \leq f \leq h^+, \quad \int_0^1 (h^+ - h^-)(t) dt < \varepsilon.$$

Une telle fonction f est bornée. Soit $\varepsilon > 0$ donnée. Sans perte de généralité, on peut supposer que f est bornée par la constante 1. Alors on a $g := f - h^- \geq 0$, et

$$\|f - S_n(f)\|_2 = \|f - h^- - S_n(f - h^-) + h^- - S_n(h^-)\|_2 \leq \|g - S_n(g)\|_2 + \|h^- - S_n(h^-)\|_2$$

D'après l'exemple 13.7 (3), il existe N tel que pour $n > N$ le deuxième terme devient plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$. Le premier terme est majoré, d'après Bessel (thm. 13.5), par $\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |g(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\varepsilon}$. Ensemble, cela implique que $S_n(f) \rightarrow f$ au sens L^2 .

13.9. Corollaire. (Unicité). *Soient f et g continues et périodiques. Si f et g ont mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.*

En effet, on aura alors $\|f - g\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f - g)|^2 = 0$, et, comme $f - g$ est continue, cela entraîne que $f = g$ (Lemme 12.6). Une autre façon d'énoncer ce corollaire est : *Si f est continue et telle que $\langle f, \mathbf{e}_k \rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.* En langage d'algèbre linéaire, cela veut dire que le supplémentaire orthogonal de $\text{vect}(\mathbf{e}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est nul, les (\mathbf{e}_k) forment un "système total" de vecteurs : dans un sens à préciser, il s'agit d'un système générateur ("base hilbertienne").

Voici sans preuve quelques autres résultats (cf. aussi TD) :

13.10. Théorème d'approximation de Weierstrass. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et périodique et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. (On dit : les polynômes trigonométriques sont uniformément dense dans $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.)*

13.11. Théorème (Dirichlet). *Soit f périodique et dérivable par morceaux sur $[0, 1]$; en particulier, pour tout $x \in [0, 1]$, les limites à gauche et à droite $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

En particulier, $(S_n f)(x)$ converge vers x en tout point où f est continue.

Finalement, quelques remarques et références pour conclure.

(1) Pendant longtemps, on croyait que, si f est continue (mais non C^1 par morceaux), alors $S_n f$ converge toujours simplement vers f . Or, c'est faux : un contre-exemple a été donné en 1873 par Du Bois Raymond. La question de décrire l'ensemble des x pour lesquels $S_n f(x)$ converge est difficile : des résultats profonds dans cette direction ont été obtenus par L. Carleson, J.-P. Kahane et autres, dans les années 60. Voir, pour un survol, http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_de_Fourier

La théorie de l'intégrale de Lebesgue est un outil indispensable pour étudier ce genre de questions, et pour la théorie L^2 en général.

(2) La théorie de Fourier a donnée lieu à une branche mathématique dite analyse harmonique. Une observation basique est ici le fait que les fonctions périodiques s'identifient avec des fonctions définies sur le groupe du cercle S^1 :

13.12. Lemme. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est périodique, alors la fonction

$$f^b : S^1 \rightarrow \mathbb{K}, \quad e^{2\pi it} \mapsto f(t)$$

est bien définie. Réciproquement, si $F : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction, alors la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $F^\sharp(t) := F \circ \mathbf{e}_1(t) = F(e^{2\pi it})$ est périodique. Ainsi $f \mapsto f^b$ définit une bijection entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{F}(S^1, \mathbb{K})$. On résume la situation par le “diagramme commutatif”:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \mathbf{e}_1 \downarrow & \nearrow_F & \\ S^1 & & \end{array}$$

Ainsi les fonctions périodiques doivent être vues comme des fonctions $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, définies sur le cercle S^1 . De même, on voit les coefficients de Fourier comme une fonction $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \mapsto c_k$ définie sur les entiers \mathbb{Z} . On remarque que (S^1, \cdot) et $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes. On dit que les groupes S^1 et \mathbb{Z} sont des groupes duaux l’un de l’autre : l’application

$$S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad (u, k) = (e^{2\pi it}, k) \mapsto e^{2\pi ikt} = u^k$$

est un peu comme un produit scalaire, faisant apparaître l’un comme l’“espace dual” de l’autre. Le groupe \mathbb{Z} est un “groupe discret” (dénombrable), et le groupe S^1 est un “groupe compact” (fermé et borné). Dans la théorie de la transformée de Fourier, qui est une sorte de “version continue” de la théorie qu’on vient de voir, la paire de groupes duaux (S^1, \mathbb{Z}) sera remplacée par la paire de groupes duaux (\mathbb{R}, \mathbb{R}) : les coefficients de Fourier seront remplacés par l’intégrale de Fourier, pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ non-périodique,

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Finalement, dans une vaste généralisation, on étudie les paires (G, \hat{G}) , formée par un groupe G et son “dual” \hat{G} . Voici deux introductions élémentaires à ce cercle d’idées

A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, Springer, New York 2005,

J. Faraut, *Analyse sur les groupes de Lie*, Calvage et Mounet, Paris 2003.

Chapitre 14 : Intégrales impropres

L’exemple de l’intégrale de Fourier ci-dessus montre qu’en analyse il faut disposer d’une définition d’une intégrale sur un *intervalle quelconque*, comme $[0, \infty[$, $]0, \infty[$, $] - \infty, \infty[$. Nous commençons par rappeler la notion “élémentaire” d’intégrale (de Riemann), connue du cours de L1/L2, que nous appelons “intégrale simple”. Ensuite, nous allons étendre cette notion, de la même manière que la notion d’une série étend la notion simple de somme finie.

14.1. Définition. Nous appelons intégrale simple l’intégrale de Riemann $\int_a^b f(t) dt$ d’une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann intégrable sur un intervalle **fermé borné** (= intervalle compact). Les propriétés les plus importantes de cette intégrale simple sont :

- 1) la règle de Chasles : si $a < c < b$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$,

- 2) la linéarité : $\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$,
- 3) la croissance : si $f \leq g$ (i.e.: $\forall t \in [a, b]: f(t) \leq g(t)$), alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$,
- 4) la normalisation : $\int_a^b 1 dt = b - a$.

Rappelons enfin que, si f est à valeurs complexes, alors on définit

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \Re(f(t))dt + i \int_a^b \Im(f(t))dt.$$

Nous ne savons pas encore intégrer des fonctions sur un intervalle ouvert ou non-borné. Par exemple, l'intégrale de la fonction $f(t) = 1/\sqrt{t}$ sur l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ n'est pas définie. Mais, l'intégrale sur l'intervalle fermé $[\varepsilon, 1]$ est définie pour tout $0 < \varepsilon < 1$, et elle vaut $2 - 2\varepsilon$. On fera alors tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, et la valeur de l'intégrale tend alors vers 2, et on définira alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} := 2$. Voici la définition générale :

14.2. Définition. Soit $-\infty < a < b \leq \infty$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $c \in]a, b[$, l'intégrale simple $\int_a^c f(t) dt$ existe. Si la limite

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(t) dt$$

existe, on l'appelle l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$. De la même façon, on définit l'intégrale impropre si $-\infty \leq a < b < \infty$. Finalement, si f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, on choisit $x_0 \in]a, b[$, et on définit

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt,$$

si les deux intégrales impropres $\int_a^{x_0} f(t) dt$ et $\int_{x_0}^b f(t) dt$ existent. (Remarque : la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix du point $x_0 \in]a, b[$. En effet, c'est une conséquence directe de la règle de Chasles.)

14.3. Quelques exemples pour lesquels un calcul direct montre l'existence d'une intégrale impropre. On calcule d'abord l'intégrale sur un intervalle compact, et on passe à la limite:

(0) $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ existe : en effet, la fonction admet un prolongement *continu* sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. De manière générale, si f est une fonction qui se prolonge en une fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$, alors l'intégrale simple $\int_a^b f(t) dt$ coïncide avec la nouvelle définition de l'intégrale impropre, i.e., $\int_a^b f(t) dt = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(t) dt$. (Exercice.)

(1) $\int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}$ (existe ssi $\alpha > -1$)

(2) $\int_1^\infty t^\alpha dt = -\frac{1}{\alpha+1}$ (existe ssi $\alpha < -1$)

(3) $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ (existe ssi $\alpha > 0$)

(4) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$

(5) Supposons que $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ existe. Par un changement de variables, on a pour les intégrales simples $\int_a^b f(x + \lambda) dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x) dx$, et en passant à la limite des deux cotés, on obtient l'invariance par translation

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^\infty f(x + \lambda) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx.$$

De la même façon, on montre que, pour $\lambda \in \mathbb{R}^\times$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \int_0^{\infty} f(\lambda x) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{x}, \quad \int_0^{\infty} f(x^{-1}) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{x}.$$

Il est utile de retenir la méthode utilisée pour l'exemple précédent – il ne faut pas appliquer “à l’aveugle” les règles de calcul usuelles (intégration par parties, changement de variable, linéarité de l’intégrale,...) : ces règles sont valables pour les intégrales simples (usuelles) ; on les applique **avant** de passer à la limite; puis il faut examiner cas par cas si, oui ou non, on peut passer à la limite. Les règles de calcul usuelles ne sont pas toujours directement applicables aux intégrales impropres ! – Pour d’autres exemples, on utilise souvent le critère suivant :

14.4. Théorème. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $c \in [a, b[$, l’intégrale simple $\int_a^c f(t) dt$ existe, et soit $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive telle que l’intégrale impropre $\int_a^b g(t) dt$ existe, et soit $|f(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$. Alors l’intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ existe aussi.

14.5. Quelques exemples où on applique ce résultat.

(1) Soit $f(t) = e^{-t^2}$. Posons $g(t) := e^{-t}$. Pour $t \geq 1$ on a $f(t) \leq g(t)$, et ainsi $\int_1^{\infty} e^{-t^2} dt$ existe. On en déduit que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$ existe aussi (intégrale de Gauss). Cette méthode ne donne pas la valeur de cette intégrale (qui est $\sqrt{\pi}$).

(2) L’intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe (intégrale de Dirichlet). En effet, remarquons d’abord que la fonction $h(t) := \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge de façon continue au point 0 (exemple 8.5 (4)). Ainsi l’intégrale $\int_0^1 h(t) dt$ ne pose pas de problème. Il suffit donc de montrer que $\int_1^{\infty} h(t) dt$ existe. Soit $c > 1$ et effectuons une intégration par parties :

$$\int_1^c \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(c)}{c} - \int_1^c \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Sur $[1, \infty[$, la fonction $f(t) := \frac{\cos(t)}{t^2}$ est majorée par $g(t) := \frac{1}{t^2}$, et le théorème permet de passer à la limite $c \rightarrow +\infty$, ainsi $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Comme ci-dessus, la méthode ne donne pas la valeur de l’intégrale (qui est $\frac{\pi}{2}$).

(3) Soit $x > 0$. Alors l’intégrale impropre suivante existe (fonction Gamma):

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Par une intégration par parties sur l’intervalle $[a, b]$, puis en passant à la limite $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, on obtient que, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, il s’ensuit que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\Gamma(x)$ est une interpolation de la factorielle. Remarque : la même intégrale existe aussi pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $\Re x > 0$ car $|t^{u+iv-1}| = t^{u-1}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

(4) Soient $x, y \in \mathbb{C}$ tel que $\Re x > 0$ et $\Re y > 0$. Alors l’intégrale impropre suivante existe (fonction Bêta):

$$\beta(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Un changement de variables montre que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$. En écrivant $\Gamma(x)\Gamma(y)$ comme une intégrale sur $(\mathbb{R}^+)^2$ et en y faisant un changement de variables, on montre que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \beta(x, y)\Gamma(x + y).$$

14.6. Définition. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)| dt$ existe.

Le théorème 14.4, pour $g(t) = |f(t)|$, implique qu'alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ existe. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ est un exemple d'une intégrale semi-convergente (elle existe, mais ne converge pas absolument – exercice). Un certain nombre de remarques du chapitre 9 sur les séries semi-convergentes s'applique également aux intégrales semi-convergentes.

14.7. Théorème. (Comparaison série – intégrale.) Soit $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction monotone décroissante. Alors sont équivalents :

(1) l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(t) dt$ existe ;

(2) la série $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge.

Dans ce cas, on a

$$\int_1^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(t) dt.$$

14.8. Exemple. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 1$. Alors $f(t) := t^{-s}$ est décroissante. On a vu (exemple 14.3 (2)) que $\int_1^\infty f(t) dt$ existe. Le théorème implique alors la convergence de

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

On en déduit la convergence de la série définie par la même formule pour un nombre complexe s tel que $\Re s > 1$. La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ ainsi définie est la fameuse fonction zêta de Riemann.

14.9. Exemple (“Intégrales de Bertrand”). (A) L'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha |\log t|^\beta dt$$

existe si, et seulement si, on est dans un des deux cas suivants : (i) $\alpha > -1$, ou (ii) $\alpha = -1$, et $\beta < -1$. (B) L'intégrale

$$\int_2^\infty t^\alpha |\log t|^\beta dt$$

existe si, et seulement si, on est dans un des deux cas suivants : (i) $\alpha < -1$, ou (ii) $\alpha = -1$, et $\beta < -1$.

Les affirmations (A) et (B) sont équivalentes entre elles, par un changement de variable. On peut voir 14.9 comme un corollaire du fait correspondant pour les séries de Bertrand (cf. exercice en examen partiel !), ou donner une nouvelle preuve de 14.9 reposant sur le critère suivant (cf. feuille 2 de TD) :

14.10. Théorème (Équivalence). Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, telles que, au voisinage de b , la fonction g soit de signe constant et

$$f(x) \sim_b g(x) \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Alors les intégrales $\int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b f(x) dx$ sont de même nature (i.e., l'une existe si et seulement si l'autre existe).

Chapitre 15 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Nous avons étudié des séries qui dépendent d'un "paramètre" : une série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ n'est rien d'autre qu'une série dépendant d'un "paramètre" x . Sous certaines conditions, la dépendance du paramètre x est continue ou même différentiable (chapitres 7 et 10).

Pour les intégrales, la situation est exactement la même : soient, dans toute la suite, I et J deux intervalles et

$$f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$$

une fonction. Nous écrivons aussi $f_x(t) := f(x, t)$; ainsi, pour tout $x \in I$ fixé, $f_x : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dépendant du paramètre x . Supposons que, pour tout $x \in I$, l'intégrale (simple ou impropre) $\int_J f_x(t) dt$ existe. Que peut-on dire alors de la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_J f_x(t) dt \quad ?$$

Sous quelles conditions est-elle *continue* ? Sous quelles conditions est-elle *différentiable* ? Les réponses à ces deux questions sont légèrement différentes selon les deux cas " J compact" (intégrale simple) ou " J non-compact" (intégrale impropre), elles donnent donc lieu à 2×2 résultats. Nous énonçons d'abord ces 4 résultats (dans tous les cas, il s'agit encore de conditions suffisantes qui permettent d'échanger deux procédés de limite), puis nous discutons quelques exemples et expliquons finalement les méthodes des preuves :

15.1. Théorème. Soit $J = [a, b]$ un intervalle compact et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Supposons que f est continue. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_J f_x(t) dt$ est continue. Autrement dit, pour tout $x \in I$,

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_a^b f(y, t) dt = \lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x) = \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \lim_{y \rightarrow x} f(y, t) dt.$$

(2) Supposons que f est continue et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe et est continue. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_J f_x(t) dt$ est de classe C^1 , et "on peut dériver sous le signe somme" :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

15.2. Théorème. Soit J un intervalle quelconque et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Supposons que f est continue et qu'il existe $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $|f(x, t)| \leq g(t)$, et telle que l'intégrale (simple ou impropre) $\int_J g(t) dt$ existe. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_J f_x(t) dt$ est continue.

(2) Supposons que f est continue, que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue, et qu'il existe $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq g(t)$, et telle que l'intégrale (simple ou impropre) $\int_J g(t) dt$ existe. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_J f_x(t) dt$ est de classe C^1 , et "on peut dériver sous le signe somme".

15.3. Exemples. (Cf. aussi TD !)

(1) $I = J = [0, \infty[$, $f(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$, et $f(x, 0) = 1$. On peut appliquer le théorème 15.2 (2) pour $x \in [a, \infty[$ avec $a > 0$, et on trouve $F'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$. On en déduit que $\int_0^\infty f(x, t) dt = -\arctg x + C$. Or, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, d'où $C = \frac{\pi}{2}$ et $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x = \arctg \frac{1}{x}$.

(2) $I = J = \mathbb{R}$, $f(x, t) = e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i x t}$. On peut dériver sous le signe somme. On montre que $F(x)$ satisfait alors à la même équation différentielle que $e^{-\pi t^2}$, et on en déduit que $F(x) = e^{-\pi x^2}$ (cf. TD : calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne).

(3) Proposition : La fonction Gamma $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ est différentiable, avec dérivée

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty (\log t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Remarque : de même, il est vrai que la fonction $\Gamma : \{x \in \mathbb{C} \mid \Re x > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -différentiable, et ainsi cette fonction est analytique. De la même manière, on montre que la fonction bêta et un grand nombre d'autres fonctions définies par des intégrales sont analytiques.

En effet, on vérifie les hypothèses de 15.2 (2) : soit $J =]0, \infty[$, $I = [\alpha, \infty[$ avec $\alpha > 0$ et $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$. Il faut majorer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \log(t) t^{x-1}$. Pour cela, on sépare $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Sur le deuxième intervalle, la majoration ne pose pas de problème, grâce à la décroissance rapide de e^{-t} . Sur $]0, 1]$, la fonction $g(t) := \log(t) t^{\alpha-1}$ est une fonction majorante de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, et $\int_0^1 g(t) dt$ existe (intégrale de Bertrand, 14.9).

(4) Une application du théorème 15.1 (1) : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors on pose

$$P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x, y) := \int_0^1 f'(x + t(y - x)) dt.$$

Comme $I \times I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(y, x, t) \mapsto f'(x + t(y - x))$ est continue, le théorème 15.1, implique que $P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. De plus, si $x - y \neq 0$, après changement de variables $v = x + t(y - x)$, la relation fondamentale entre calcul différentiel et intégral implique que $P(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Si $x = y$, on trouve que $P(x, x) = \int_0^1 f'(x) dt = f'(x)$. Cela donne :

15.4. Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors il existe une fonction continue (dite la pente de f) $P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \quad P(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Remarque. La réciproque est vraie aussi : si P existe, alors $P(x, x) = \lim_{y \rightarrow x} P(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ existe, et donc $f'(x)$ existe et vaut $P(x, x)$, ce qui est bien une fonction continue quand P est continue.

Continuité et continuité uniforme

Soient $M \subset \mathbb{R}^n$ et $N \subset \mathbb{R}^m$ et $f : M \rightarrow N$ une application. Soit $d(x, y) = \|x - y\|$ (distance entre x et y ; comme norme on peut prendre $\|v\| = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$).

Rappel 1. f continue si : $\forall x \in M, \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$;

f uniformément continue si : $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in M: d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Rappel 2. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ compact (fermé et borné) et $f : M \rightarrow N$. Alors : f continue $\Rightarrow f$ uniformément continue.

Preuve de 15.1 (1). Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in I$. On choisit un intervalle compact $I_0 \subset I$ tel que $x_0 \in I$. Le rectangle $J \times I_0$ est compact. Alors $f : J \times I_0$ est uniformément continue (rappel 2), donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b f(x, t) - f(x_0, t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \\ &\leq |b - a| \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

si $x \in I_0$ est tel que $|x - x_0| < \delta$. Il s'ensuit que F est continue au point x_0 .

Preuve de 15.1 (2). Nous utilisons la proposition 15.4, appliquée à la fonction $x \mapsto f(x, t)$: il existe une application continue $Q : I \times I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto Q(x, y, t)$ telle que, pour $x \neq y$, $Q(x, y, t) = \frac{f(x, t) - f(y, t)}{x - y}$ et $Q(x, x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$. Alors, si $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} &= \int_a^b \frac{f(x, t) - f(y, t)}{x - y} dt \\ &= \int_a^b Q(x, y, t) dt ; \end{aligned}$$

mais cette dernière expression existe aussi pour $x = y$, et d'après 15.1 (1), elle définit une fonction continue $P(x, y)$ de $(x, y) \in I \times I$. En utilisant la réciproque de 15.4, il s'ensuit que F est de classe C^1 , et pour $x = y$ on obtient la "dérivation sous le signe somme".

Preuve de 15.2 (1). On considère le cas $J = [a, b]$. On choisit une suite monotone $J \ni b_n \rightarrow b$, avec $b_0 = a$. L'intégrale $\int_a^{b_n} f(x, t) dt$ existe et est égal à

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x, t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(x, t) dt =: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F_k(x).$$

D'après 15.1 (1), les fonctions F_k sont continues. De plus,

$$\|F_k\|_\infty = \sup_{x \in I} |F_k(x)| \leq \sup_{x \in I} \int_{b_{k-1}}^{b_k} |f(x, t)| dt \leq \int_{b_{k-1}}^{b_k} g(t) dt =: C_k.$$

Puisque $\int_a^b g(t) dt$ existe, la somme $\sum_{k=1}^\infty C_k$ converge vers $\int_a^b g(t) dt$, ainsi la série de fonctions $\sum_k F_k(x)$ converge normalement, donc uniformément, et donc la limite F est une fonction continue (théorème 10.5).

Preuve de 15.2 (2). On utilise exactement la même stratégie, en invoquant cette fois-ci le théorème 10.10 (convergence au sens C^1).