

CPUMP 3 U 11 : Abrégé de cours

Compléments Analyse 3 : fonctions analytiques

Les notes suivantes, disponibles à l'adresse <http://www.iecn.u-nancy.fr/~bertram/>, contiennent les définitions et les résultats principaux du cours "compléments d'Analyse 3" ainsi que quelques exercices concernant ces compléments. Le résumé du cours principal "Analyse 3" est disponible dans un fichier séparé à la même adresse. Nous citons le théorème x.y du résumé de ce cours sous la forme [Cours, théorème x.y], etc. Les compléments seront numérotés C1 (= Complément 1), C2, ...

C1 : Fonctions de plusieurs variables

Dans la "vie réelle" en mathématiques (et dans les applications, comme la physique), il est important de développer l'analyse non seulement pour les *fonctions d'une variable*, mais pour des *fonctions de plusieurs variables*, i.e., des fonctions f définies sur une partie de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m . Ce sujet sera traité de façon plus approfondie dans le cours "Analyse 2 - fonctions de plusieurs variables", qui sera enseigné en CPU en S4, après le cours Analyse 3. Cependant, il faut s'habituer le plus rapidement possible à placer l'analyse dans le cadre de plusieurs variables ; dans les compléments, nous allons développer ce point de vue un peu plus loin que dans le cours principal. Ce premier chapitre sert à se familiariser dès maintenant avec quelques notions "topologiques" fondamentales sur les espaces \mathbb{R}^n : *distance, suites convergentes, continuité...*

C1.1. Définition. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. La distance euclidienne entre x et y est définie par la "formule de Pythagore"

$$d_{\text{eu}}(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

La distance de x à l'origine 0 s'appelle la norme euclidienne, notée

$$\|x\|_{\text{eu}} := d_{\text{eu}}(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

de sorte qu'on a $d_{\text{eu}}(x, y) = \|x - y\|_{\text{eu}}$. La boule ouverte de centre x et de rayon r est

$$B_{r,\text{eu}}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_{\text{eu}}(x, y) < r\}.$$

C1.2. Définition. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. La distance sup entre x et y est définie par

$$d_{\infty}(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|.$$

La distance de x à l'origine 0 s'appelle la norme sup, notée

$$\|x\|_\infty := d_\infty(x, 0) = \max_i |x_i|,$$

de sorte qu'on a $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$. Le cube ouvert de centre x et de rayon r est

$$B_{r,\infty}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(x, y) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n : |x_i| < r\}.$$

C1.3. Remarque. Voici quelques propriétés évidentes que satisfont ces deux normes, resp. distances : pour $d = d_{\text{eu}}$ ou $d = d_\infty$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\text{eu}}$ ou $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$,

(N1) (positivité) $\|x\| \geq 0$, et $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$;

(N2) (homogénéité) pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\|rx\| = |r| \|x\|$;

(D1) (positivité) $d(x, y) \geq 0$, et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$;

(D2) (symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$.

Nous discutons plus tard (exercice 5) une autre propriété importante.

C1.4. Lemme. Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a $\|z\|_{\text{eu}} \leq \sqrt{n} \|z\|_\infty \leq \sqrt{n} \|z\|_{\text{eu}}$, i.e.,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2} \leq \sqrt{n} \max_i |z_i| \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n z_i^2}.$$

Géométriquement, le lemme signifie qu'on peut "emboîter" des cubes dans des boules, et réciproquement (faire un dessin pour $n = 2$).

C1.5. Définition. Une suite dans \mathbb{R}^n est notée $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, où

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Chaque composante $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, pour $i = 1, \dots, n$ fixé, est une suite numérique ordinaire. On dit que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, et on écrit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, si la distance euclidienne entre $x^{(k)}$ et x converge vers 0, i.e., si $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\text{eu}}(x^{(k)}, x) = 0$.

C1.6. Lemme. Pour une suite dans \mathbb{R}^n sont équivalents :

(i) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\text{eu}}(x^{(k)}, x) = 0$ (i.e., $x^{(k)}$ converge vers x pour $k \rightarrow \infty$) ;

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} d_\infty(x^{(k)}, x) = 0$;

(iii) pour tout $i = 1, \dots, n$: la suite numérique $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge au sens usuel, pour $k \rightarrow \infty$, vers un nombre réel x_i .

Ce lemme permet, d'une part, de reconnaître facilement des suites convergentes dans \mathbb{R}^n , et, d'autre part, de démontrer, "composante par composante", quelques résultats standards, similaires aux propriétés usuelles pour les suites :

C1.7. Corollaire. La somme de deux suites convergentes $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ est convergente, et sa limite est la somme des deux limites ; un multiple $rx^{(k)}$ d'une suite convergente vers x est convergente, avec limite rx .

C1.8. Notations relatives aux applications. Dans la suite, soit $U \subset \mathbb{R}^n$ une partie non-vide et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$ une application. Plus explicitement, on note

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

L'application

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_i(x)$$

s'appelle la i -ième composante de f . Si $m = 1$, on a juste une composante : on parle d'une fonction scalaire. Si $n = 1$, on note souvent t au lieu de x la variable ("temps"), et on interprète $f : \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ comme une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^m .

C1.9. Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ comme ci-dessus et soit $x \in U$. On dit que f est continue au point x si, pour toute suite $x^{(k)} \in U$ qui converge vers x pour $k \rightarrow \infty$, la suite $f(x^{(k)})$ converge dans \mathbb{R}^m vers $f(x)$:

$$f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)})$$

On dit que f est continue (sur U) si f est continue en tout point $x \in U$.

Exemples : les fonctions constantes sont continues ; les projections $\text{pr}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$ sont continues.

C1.10. Théorème. Pour une application $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont équivalents :

- (i) f est continue au point x (resp. sur U) ;
- (ii) pour tout $i = 1, \dots, m$: la composante f_i est continue au point x (resp. sur U).

Ce théorème permet donc de se ramener au cas des fonctions scalaires ($m = 1$). Attention : on ne peut pas se ramener aussi facilement au cas $n = 1$. Dans ce sens, le cas des fonctions scalaires est le cas le plus important.

C1.11. Théorème.

- (1) Sommes et multiples d'applications continues sont continues, et la fonction $f = 0$ est continue ; ainsi l'ensemble $C(U, \mathbb{R}^m)$ des applications continues $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel.
- (2) La composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de deux applications continues $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $f : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ est continue.
- (3) (pour $m = 1$:) Le produit $f \cdot g$ (définie par $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$) de deux fonctions scalaires continues $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

C1.12. Théorème. Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

Rappel (cours d'algèbre) : une application linéaire est de la forme $f(x) = Ax$ avec une matrice $A = (a_{ij})$, ou encore $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$; autrement dit, $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{pr}_j$.

C1.13. Théorème. Toute application polynomiale $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

C1.14. Définition/rappel. Soit \mathbb{K} un corps. Pour $x \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (un multi-index), on définit le monôme

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

son degré est par définition $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Une fonction polynomiale $p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une combinaison linéaire finie de monômes (i.e., la somme suivante a seulement un nombre fini de termes non-nuls) :

$$x \mapsto p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha,$$

avec des constantes $a_\alpha \in \mathbb{K}$. Il est commode de regrouper tout les termes de même degré. Le degré de p est alors le plus haut degré qui apparaît dans cette écriture :

$$p(x) = \sum_{j=0}^d \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j} a_\alpha x^\alpha.$$

Noter que le terme correspondant à $j = 0$ est juste une constante, celui correspondant à $j = 1$ est une forme linéaire, et celui correspondant à $j = 2$ une forme quadratique, etc.

Une application polynomiale $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ est une application telle que chaque composante $f_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale.

Exercices pour le complément 1

1. Puissance matricielle. Montrer qu'on peut identifier l'espace des matrices carrées $M(n, n; \mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^{n^2} , et que l'application

$$M(n, n; \mathbb{R}) \rightarrow M(n, n; \mathbb{R}), \quad X \mapsto X^2$$

est polynomiale (on pourra commencer par le cas $n = 2$), et conclure qu'elle est continue. Idem pour l'application $X \mapsto X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

2. Applications rationnelles. Montrer que l'inversion $i : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^{-1}$ est continue. En déduire que toute fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (i.e., $p, q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont polynomiales et $q \neq 0$) est continue sur l'ensemble $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \neq 0\}$.

Application : montrer que l'inversion matricielle $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, n; \mathbb{R}), X \mapsto X^{-1}$ est une application continue.

3. Changement de base: un exemple. Fixons la base $b_1 = (1, 0), b_2 = (1, 1)$ dans le plan E et identifions E avec \mathbb{R}^2 par la bijection $\mathbb{R}^2 \rightarrow E, (x, y) \mapsto xb_1 + yb_2$. Identifions également les boules $B_{r, \infty}(x)$, resp. $B_{r, \text{eu}}(x)$, avec leur image par cette bijection. Dessiner les images dans E de $B_{1, \infty}(0)$ et de $B_{1, \text{eu}}(0)$. Quelles figures géométriques sont représentées par ces images ? Montrer qu'on peut "emboîter" ces figures dans les boules "usuelles" (par rapport à la base canonique), dans le sens du lemme C1.4.

4. Changement de base: cas général. Homéomorphismes. Soit $A \in GL(n, \mathbb{R})$ (i.e., une matrice inversible). Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ est un homéomorphisme (i.e., bijective, continue, et l'inverse f^{-1} est aussi continue).

Conclure que les notions de convergence et de continuité ne dépendent pas de la base choisie, i.e.: soit V un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} , et identifions V à \mathbb{R}^n à

l'aide d'une base b_1, \dots, b_n . On définit ainsi sur V des notions de convergence de suites et de continuité d'applications. Alors, ces notions ne dépendent pas du choix de la base.

5. Convexité. C'est une notion fondamentale de géométrie en \mathbb{R}^n :

C1.15. Définition. Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe si, pour tout $x, y \in S$, le segment

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$$

appartient entièrement à S . (Faire des dessins d'exemples de parties convexes de \mathbb{R}^2 !)

(1) Montrer que les boules $B_{r,\infty}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ sont convexes.

(2) Montrer que les boules $B_{r,\text{eu}}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ sont convexes.

Remarque/indication. Chercher d'abord une preuve directe : on constate que la preuve est nettement plus difficile dans le cas euclidien. Elle sera systématisée dans le cours "Analyse 2" où on étudie la notion fondamentale de *norme* :

C1.16. Définition. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une norme sur V est une application $V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les propriétés (N1) et (N2) de la remarque C1.3, et

(N3) (inégalité triangulaire) pour tout $x, y \in V$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'approche systématique consiste à établir d'abord que la norme sup et la norme euclidienne sont des normes dans ce sens. Ensuite, on démontre la convexité des boules à partir de (N1), (N2) et (N3).

6. Le cas complexe. Montrer qu'il existe une identification naturelle entre \mathbb{C}^n et \mathbb{R}^{2n} , et que sous cette identification la norme euclidienne correspond à $\|z\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i}$.

Montrer que la norme $\|z\|_\infty := \max_i |z_i|$ est équivalente à la précédente (au sens du lemme C1.4) ; est-ce qu'elle correspond exactement à la norme sup dans \mathbb{R}^{2n} ?

Formuler des notions de convergence de suites et de continuité dans \mathbb{C}^n , et dire lesquels parmi les résultats précédents restent valables dans ce cadre.

C2 : Exponentielle matricielle et équations différentielles ordinaires

Les exponentielles usuelles $t \mapsto ce^{at}$ sont les solutions de l'équation différentielle $f' = af$ ($a \in \mathbb{R}$) avec condition initiale $f(0) = c$. En plusieurs dimensions, cette équation est remplacé par un *système d'équations différentielles ordinaires*. D'abord, quelques définitions de base concernant les *courbes* :

C2.1. Définition. Une courbe [continue] dans $V = \mathbb{R}^n$ est une application [continue] $\alpha : I \rightarrow V$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. (Dessiner des exemples pour $n = 2$ ou $n = 3$!)

C2.2. Lemme. Pour une courbe $\alpha : I \rightarrow V$ sont équivalentes :

(i) pour tout $t \in I$, la limite $\alpha'(t) := \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$ existe dans V ;

(ii) chaque composante $\alpha_i := \text{pr}_i \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au sens usuel.

On a alors

$$\alpha'(t) := (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t)).$$

C2.3. Définition. Une courbe $\alpha : I \rightarrow V$ est dite différentiable (de classe C^1) si elle satisfait la condition du lemme et si la courbe dérivée $\alpha' : I \rightarrow V$ est continue. Si α' est de classe C^1 , la courbe α est dite de classe C^2 , et on pose $\alpha'' = (\alpha')'$, etc. (Interpétation cinématique: $t \mapsto \alpha(t)$ est une trajectoire, t la variable de temps et $\alpha'(t)$ le vecteur-vitesse et $\alpha''(t)$ le vecteur-accélération.)

Exemple : $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est une courbe de classe C^∞ dans \mathbb{R}^2 . Faire un dessin de la trajectoire, calculer les vecteurs vitesse et accélération.

C2.4. Définition. Soit $U \subset V = \mathbb{R}^n$ une partie non-vide. Un champ de vecteurs sur U est une application $X : U \rightarrow V$. Visualisation : on “accroche” à chaque point $u \in U$ un “vecteur direction” (une flèche) d’origine u et de direction $X(u)$.

Une courbe intégrale d’un champ de vecteurs $X : U \rightarrow V$ est une courbe de classe C^1 , $\alpha : I \rightarrow V$, qui “suit le champ” dans le sens que

$$\forall \alpha \in I : \quad \alpha'(t) = X(\alpha(t)). \quad (\text{EDO})$$

C2.5. Remarque. (EDO) est un système d’équations différentielles ordinaires :

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad \alpha'_i(t) = X_i(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)).$$

En général, on ne sait pas si des solutions existent (il faut au moins supposer que X soit suffisamment régulier...)

Exemple 1 : $U = V = \mathbb{R}^2$ et $X(u_1, u_2) = (-u_2, u_1)$. Dessiner ce champ, et montrer que la courbe de l’exemple précédent est une courbe intégrale. Trouver des courbes intégrales telles que $\alpha(0) = (r, 0)$ avec $r \geq 0$, et les dessiner dans un dessin commun.

Exemple 2 : $U = V = \mathbb{R}^2$ et $X(u_1, u_2) = (u_2, u_1)$. Dessiner ce champ, et montrer que la courbe $\alpha(t) = (\text{ch}(t), \text{sh}(t))$ est une courbe intégrale. Trouver des courbes intégrales telles que $\alpha(0) = (r, 0)$, resp. $\alpha(0) = (0, r)$ avec $r \geq 0$.

Ces deux exemples sont des cas particuliers des résultats puissants suivants, qui utilisent l’exponentielle matricielle, définie dans [cours, thm. 3.9] et [cours, thm. 3.10].

C2.6. Théorème. Soit $A \in M(m, m; \mathbb{R})$ une matrice carrée, et soit $v \in \mathbb{R}^m$.

(i) La courbe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M(m, m; \mathbb{R})$, $t \mapsto e^{tA}$ est différentiable, et on a

$$\alpha'(t) = A \cdot \alpha(t) \text{ (produit de matrices), et } \alpha(0) = 1_m.$$

(ii) La courbe $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto e^{tA}v$ est une courbe courbe intégrale (avec valeur initiale $\gamma_v(0) = v$) du champ $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u \mapsto Au$, i.e.,

$$\gamma'_v(t) = A \cdot \gamma(t) \text{ (produit matrice } \times \text{ vecteur) et } \gamma_v(0) = v.$$

C2.7. Remarque. La propriété $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$ (pour tout $s, t \in \mathbb{R}$) donne

$$\gamma_v(t+s) = \gamma_{\gamma_v(t)}(s).$$

C2.8. Remarque. On peut résumer le théorème C2.6 en disant que tout champ linéaire de vecteurs (i.e., $X : v \mapsto X(v)$ est une application linéaire, donnée par une matrice A), admet des courbes intégrales $\gamma_v : I \rightarrow V$, avec condition initiale $\gamma_v(0) = v$, telles que l'intervalle de définition I soit \mathbb{R} tout entier. On verra (exercice 1) qu'il en est de même pour les champs constants. Plus généralement, en théorie des équations différentielles ordinaires, on considère des champs "lisses" quelconques $X : U \rightarrow V$ (définis sur une partie "ouverte" U de V). Un théorème général affirme alors que des courbes intégrales existent et sont uniques, mais en général le plus grand intervalle de définition I est plus petit que \mathbb{R} . L'étude plus détaillée de l'ensemble de ces courbes intégrales fait partie de la théorie des EDO et, plus globalement, de la théorie des systèmes dynamiques. Le cas linéaire y joue un rôle important : il sert, localement, comme première approximation du cas général.

Exercices pour le complément C2

1. Les champs constants. Soit $v \in V = \mathbb{R}^n$ et $X(x) = v$ (champ constant). Calculer et dessiner ses courbes intégrales : montrer que, pour tout $u \in V$, il existe une unique courbe intégrale γ_u telle que $\gamma_u(0) = u$. Étudier, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\phi_t : V \rightarrow V$, $u \mapsto \gamma_u(t)$: quelle est sa nature géométrique ? Montrer que, pour $t, s \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

2. Image d'une courbe intégrale. Fixons une matrice carrée A . Pour tout vecteur $v \in V = \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{O}_v := \{e^{tA}v \mid t \in \mathbb{R}\}$ l'image de la courbe intégrale γ_v . Montrer que, pour $v, w \in V$, seulement les deux cas suivants sont possibles :

- a) soit, $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_w$;
- b) soit, $\mathcal{O}_v \cap \mathcal{O}_w = \emptyset$.

Autrement dit, les ensembles \mathcal{O}_v pour $v \in V$ forment une partition de V .

3. Calcul d'exponentielle : exemples. Pour les matrices A suivantes, calculer e^{tA} (ici, $a > b > 0$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

4. Exercice de dessin. Pour chacune des matrices de l'exercice 3 : dessiner le champ de vecteurs $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u \mapsto Au$ ainsi que quelques courbes intégrales.

5. Exponentielle et changement de base.

(1) Soit A une matrice carrée et T une matrice inversible. En utilisant la série exponentielle, montrer que

$$e^{TAT^{-1}} = Te^AT^{-1}.$$

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA} . (Indication : deux stratégies possibles – calcul direct en calculant A^2, A^3, \dots , ou bien trouver une matrice de passage T telle que $A' = TAT^{-1}$ soit une matrice diagonale.) Tracer les courbes $\gamma_v(t)$ comme dans l'exercice précédent.

(3) Résoudre le système différentiel

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= f(t) + 2g(t) \\ g'(t) &= 2f(t) + 3g(t) \end{aligned} \right\}$$

6. EDO linéaires à coefficients constants. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$f^{(n)} = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{n-1} f^{(n-1)}$$

(où $a_i \in \mathbb{R}$). Montrer que, en posant $f_1 := f'$, $f_2 := f_1'$, etc., ce système est équivalent à n équations de degré 1, qu'on écrira sous forme matricielle.

Pour résoudre cette équation, on peut chercher des solutions de la forme $e^{\lambda x}$. Trouver une condition nécessaire pour le scalaire λ . Exemple : résoudre

$$f''' - 6f'' + 11f' - 6f = 0.$$

Parfois, il existe aussi des solutions de la forme $x e^{\lambda x}$. Exemple : résoudre

$$f'' - 2f' + f = 0$$

Distinguer aussi des solutions réelles et complexes. Exemple : résoudre

$$2f''' - 5f'' + 6f' - 2f = 0$$

7. Lien entre matrices orthogonales et matrices antisymétriques. Montrer que $(e^A)^t = e^{A^t}$ (matrice transposée). Conclure que, si $A^t = -A$ (i.e., A est antisymétrique), alors $B := e^A$ est une matrice orthogonale (i.e., $B^t = B^{-1}$).

C3 : Brève introduction aux équations différentielles aux dérivées partielles

Les EDO concernent des fonctions d'une variable réelle, et les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) concernent des fonctions de plusieurs variables $f(x_1, \dots, x_n)$. C'est un très vaste sujet, et nous donnons ici seulement quelques notions de base pour permettre au lecteur de se faire une idée de la nature mathématique de ces questions. Les EDP les plus importantes proviennent de la physique. Nous supposons que le lecteur a déjà utilisé de façon "naïve" des dérivées partielles : par exemple, pour une fonction $f(t, x, y)$, on les note $\partial_t f$, $\partial_x f$, $\partial_y f$, et $\partial_x^2 f = \partial_x(\partial_x f)$ pour une dérivée partielle seconde, ou aussi parfois f_t , f_x , f_y , resp. f_{xx} , etc. Voici une liste de quelques EDP fondamentales :

Exemple 1 : l'équation de la chaleur. La distribution de la chaleur sur un bâton (coordonnée x) au temps t obéit à l'équation de la chaleur (où $C > 0$ est une constante)

$$(EqCh1) \quad \partial_t f(x, t) = C \partial_x^2 f(x, t).$$

Si, au lieu d'un bâton (une dimension) on prend une plaque (deux dimensions ; coordonnées x, y), cette équation devient

$$(EqCh2) \quad \partial_t f(x, y, t) = C (\partial_x^2 f(x, y, t) + \partial_y^2 f(x, y, t)).$$

Pour que la solution soit bien déterminée, il faut prescrire une distribution de température au temps $t = 0$: $f(x, 0) = h(x)$, resp. $f(x, y, 0) = h(x, y)$, avec h une fonction donnée (condition initiale). Si les bouts du bâton (de coordonnées $x = 0$ et $x = \ell > 0$) sont maintenus à température donnée, on a une condition de bord supplémentaire, comme par exemple $f(0, t) = 0$, $f(\ell, t) = 0$ ("bouts frigifiées").

Exemple 2 : l'équation des ondes, resp. de la corde vibrante. C'est l'EDP

$$(EqOn1) \quad \partial_t^2 f(x, t) = C \partial_x^2 f(x, t),$$

avec une constante $C > 0$, qui décrit la vibration d'une corde (coordonnée x) en fonction du temps t , resp. d'une membrane (coordonnées x, y), resp. des phénomènes d'onde (coordonnées x, y, z) :

$$(EqOn2) \quad \partial_t^2 f(x, y, z, t) = C (\partial_x^2 f(x, y, z, t) + \partial_y^2 f(x, y, z, t) + \partial_z^2 f(x, y, z, t)).$$

Comme dans l'exemple précédent, la physique motive d'imposer des conditions initiales et des conditions de bord.

Exemple 3 : l'équation du potentiel. Pour une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, c'est l'équation

$$(EqPot) \quad \partial_x^2 f(x, y, z) + \partial_y^2 f(x, y, z) + \partial_z^2 f(x, y, z) = 0$$

On l'abrège souvent sous la forme $\Delta f = 0$, et une fonction telle que $\Delta f = 0$, est dite harmonique.

Exemple 4 : l'équation de transport. C'est l'EDP, avec une fonction d'une variable réelle $a(x)$,

$$(EqTrp) \quad a(x) \partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) = 0$$

Exemple 5 : les équations de Cauchy-Riemann. C'est un *système* de deux EDP pour une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$:

$$(EqsCR) \quad \partial_y f(x, y) = -\partial_x g(x, y), \quad \partial_x f(x, y) = \partial_y g(x, y).$$

Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n

Nous donnons les définitions et les faits fondamentaux concernant les dérivées partielles, puis proposons l'étude de quelques propriétés des exemples précédentes sous forme d'exercice. On abrège $V := \mathbb{R}^n$, et soit toujours $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire définie sur une partie non-vide $U \subset V$.

C3.1. Définition. Soit $v \in V$. La dérivée directionnelle d'une fonction $f : V \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ en direction de v , et au point $x \in U$, est définie par

$$\partial_v f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

si cette limite existe. On dit que f est de classe C^1 si, pour tout $v \in V$ et $x \in U$, $\partial_v f(x)$ existe et si pour tout v la fonction

$$\partial_v f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \partial_v f(x)$$

est continue. La dérivée partielle de f par rapport à la i -ième variable est la dérivée directionnelle en direction du vecteur e_i de la base canonique ; on la note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x).$$

Si $n = 3$, et si les variables s'appellent, par exemple, (x, y, t) , on écrit aussi $\partial_x f$ ou $\partial_1 f$ ou f_x pour la dérivée partielle par rapport à la première variable (x ici), etc. On la calcule en “gélant” les variables y et t et en dérivant ensuite par rapport à x de la façon “usuelle”. On vérifie immédiatement les règles de calcul

$$\partial_v(f + g) = \partial_v f + \partial_v g, \quad \partial_v(\lambda f) = \lambda \partial_v f \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Exercice. Démontrer la règle de calcul (“règle de Leibniz”)

$$\partial_v(f \cdot g) = g \cdot \partial_v f + f \cdot \partial_v g.$$

C3.2. Théorème (linéarité). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors, pour tout $v, w \in V = \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$, on a

$$(1) \partial_{v+w} f(x) = \partial_v f(x) + \partial_w f(x),$$

$$(2) \partial_{rv} f(x) = r \partial_v f(x).$$

(Exercice : démontrer (2) par un simple changement de variable ; la preuve de (1) est plus difficile et sera faite dans le cours “Analyse 2”.) En particulier, en écrivant $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, il s’ensuit que

$$\partial_v f(x) = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(x).$$

C3.3. Définition. On dit que f est de classe C^2 si elle est C^1 et, pour tout $v \in V$, $\partial_v f$ est à son tour de classe C^1 . Dans ce cas, les dérivées partielles mixtes $\partial_u(\partial_v f)$ existent pour tout u et v . Ainsi de suite, on définit les classes C^k et C^∞ . Notation : pour $U \subset \mathbb{R}^n$,

$$C^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } C^\infty\}.$$

On admet le résultat fondamental suivant qui est démontré dans le cours “Analyse 2 : fonctions de plusieurs variables” :

C3.4. Théorème (“Lemme de Schwarz”). Si f est de classe C^2 , alors pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $x \in U$, on a $\partial_v \partial_u f(x) = \partial_u \partial_v f(x)$. En particulier, pour $i, j = 1, \dots, n$,

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

C3.5. Notations et définition. On écrit $\partial_v^2 f := \partial_v(\partial_v f)$, etc., et pour un multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on écrit

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$$

Le degré de dérivation dans l’expression $\partial^\alpha f$ est $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

On appelle opérateur (linéaire) toute application linéaire Φ qui à une fonction f associe une autre fonction $\Phi(f)$. Par exemple,

$$\partial_v : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U), \quad f \mapsto \partial_v f$$

est un opérateur linéaire. On dit que deux opérateurs Φ et Ψ commutent si $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Ainsi le lemme de Schwarz dit que les opérateurs ∂_v et ∂_u commutent, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Un opérateur différentiel linéaire est un opérateur donné par une somme *finie* de la forme

$$Df(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(x) \partial^\alpha f(x)$$

où $x \mapsto a_\alpha(x)$ sont des fonctions (supposées différentiables). Une EDP linéaire est une équation de la forme $Df = u$, où D est un opérateur différentiel linéaire, et u est une fonction donnée. Si $u = 0$, l'équation est dite homogène.

C3.6 Exemples. Pour simplifier, supposons que $n = 2$.

(1) $D = \Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2$ (opérateur laplacien), $Df = 0$ est l'équation du potentiel

(2) $D = \partial_1^2 - C\partial_2^2$ ($C > 0$, opérateur d'alembertien), $Df = 0$ est l'équation des ondes

(3) $D = \partial_1^2 - C\partial_2$ ($C > 0$, opérateur de la chaleur), $Df = 0$ est l'équation de la chaleur

(4) $D = a_1(x)\partial_1 + \partial_2$: on appelle $Df = 0$ l'équation de transport.

Toutes ces exemples sont des équations homogènes. L'ensemble des solutions $\{f \mid Df = 0\}$ est alors un espace vectoriel, qui peut être très "grand". Dans un contexte physique, la solution doit souvent satisfaire à des conditions de bord ou de valeurs initiales, ce qui rend en général la solution unique. Nous revenons maintenant sur les exemples donnés en début de chapitre. Il n'est pas question ici de les traiter systématiquement : chaque exemple mériterait au moins un chapitre à part. De plus, il nous manquent pour le moment quelques outils importants d'une approche générale, dont l'outil puissant des *séries et transformations de Fourier*.

Exercices

1. L'équation de la chaleur. Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle $f_t = Cf_{xx}$ avec $C > 0$ pour une fonction $f(x, t)$. Posons $c := \sqrt{C}$.

(A) Une solution fondamentale : noyau de la chaleur. Calculer, pour $t > 0$, les dérivées partielles de la fonction

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{Ct}} e^{-\frac{x^2}{4Ct}},$$

(dit le noyau de la chaleur) et vérifier qu'il s'agit d'une solution de (EqCh1). Étudier cette fonction : étudier, pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ (maximums, points d'inflexion...), et dessiner, pour plusieurs valeurs de t fixées, les graphes dans un même schéma. Si on fixe $x \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t)$, existe-t-elle ? Peut-on définir une "fonction $f(0, x)$ " ?

(B) Séparation des variables. On cherche d'autres solutions de la forme particulière

$$(S) \quad f(x, t) = X(x)T(t)$$

avec deux fonctions d'une seule variable, $X(x)$ et $T(t)$, supposées non-nulles. En supposant f de cette forme, calculer les dérivées partielles, remplacer dans (EqCh1) et regrouper les termes en x d'un côté et les termes en t de l'autre côté. Conclure qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$X'' = -\lambda X, \quad T' = -C\lambda T.$$

En distinguant les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, donner les solutions possibles, et vérifier qu'on obtient en effet ainsi une infinité de solutions de (EqCh1). Est-ce que la solution décrite dans la partie (A) se trouve parmi ces solutions ?

(C) Condition de bord. On impose maintenant la condition de bord $f(0, t) = 0 = f(\ell, t)$ pour un $\ell > 0$ fixé ($\ell =$ la longueur du bâton : les bouts du bâton sont maintenus à température constante 0). En supposant $f(x, t)$ de la forme $X(x)T(t)$ comme ci-dessus, montrer que, si $\lambda \leq 0$, seulement la solution triviale $X = 0$ peut satisfaire cette condition de bord.

Supposons donc $\lambda > 0$ et écrivons $\lambda = k^2$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions possibles sont précisément de la forme

$$f_n(x, t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \quad \text{avec } \lambda_n = \frac{cn\pi}{\ell}, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Montrer que toute somme de la forme $\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$ est également une solution de (EqCh1) avec conditions de bord.

(D) Condition initiale. Supposons maintenant que, au temps $t = 0$, la distribution de la température soit donnée par $f(x, 0) = u(x)$, où $u : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable donnée.

Calculer, pour $n, m \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell} x\right) dx.$$

(Indication : un calcul passant par les nombres complexes peut être plus simple.)

Faisons l'hypothèse (H) suivante : *il existe $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f(x, t) := \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$ satisfasse la condition initiale.* Calculer l'intégrale

$$\int_0^\ell f(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell} x\right) dx,$$

et en déduire que

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx.$$

Conclure que, sous ces hypothèses, une solution de (EqCh1) satisfaisant aux conditions de bord et initiales, est donnée par

$$f(x, t) = \int_0^\ell G(x, t; \xi) u(\xi) d\xi \quad \text{avec } G(x, t; \xi) := \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^N \exp\left(-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right)$$

(E) Problèmes qui restent ouverts. Pour quelles fonctions u , l'hypothèse (H) est-elle satisfaite ? Que faire, si elle ne l'est pas ? Peut-on remplacer alors la somme finie $\sum_{n=0}^N$ par une somme infinie $\sum_{n=0}^\infty$? La solution, est elle finalement uniquement déterminée par les conditions initiales et de bord ? Pour aborder toutes ces questions, il sera nécessaire de développer d'abord la théorie des *séries de Fourier*. En attendant, on pourra consulter pour un survol http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation et http://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables.

2. Équation de la corde vibrante. On considère la version unidimensionnelle (EqOn1): $f_{tt} = C f_{xx}$ avec $C > 0$. On pose $c := \sqrt{C}$.

(A) Changement de variable. Vérifier de façon directe :

$$f(x, t) = h(x - ct) + g(x + ct)$$

avec h, g de fonctions C^1 d'une variable, est solution de (EqOn1).

Montrer que toute solution sur \mathbb{R}^2 est obtenue de cette façon : résoudre d'abord l'EDP

$$(1) \quad \partial_x \partial_y u(x, y) = 0$$

et montrer que la solution générale est de la forme $u(x, y) = H(x) + G(y)$ avec des fonctions H et G définies sur \mathbb{R} . Ensuite, montrer par le changement de variables $\xi := x - ct$ et $\tau = x + ct$, que (EqOn1) se ramène à (1) ; conclure. (Remarque : cette solution n'est utile que s'il n'y a pas de condition de bord ("onde libre").)

(B) Séparation des variables. On cherche des solutions de la forme particulière

$$(S) \quad f(x, t) = X(x)T(t)$$

avec deux fonctions d'une seule variable, $X(x)$ et $T(t)$, supposées non-nulles. Comme ci-dessus, montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$X'' = \lambda X, \quad T'' = \lambda CT.$$

En distinguant les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, donner les solutions possibles, et vérifier qu'on obtient en effet ainsi une infinité de solutions de (EqOn1).

(C) Condition de bord. On impose maintenant la condition de bord $f(0, t) = 0 = f(\ell, t)$ pour un $\ell > 0$ fixé ($\ell =$ la longueur de la corde : les bouts de la corde sont fixés, donc amplitude 0). En supposant $f(x, t)$ de la forme $X(x)T(t)$ comme ci-dessus, montrer que, si $\lambda \geq 0$, seulement la solution triviale $X = 0$ peut satisfaire cette condition de bord. Supposons donc $\lambda < 0$ et écrivons $\lambda = -k^2$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions possibles sont précisément de la forme, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(a_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right) \quad \text{avec } a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Pour $n = 1$, c'est le son fondamental ou la fréquence fondamentale, et les harmoniques d'un son musical sont des fréquences multiples entiers de cette première harmonique. Montrer que toute somme de la forme $\sum_{n=1}^N f_n(x, t)$ ("superposition de sons") est également une solution de (EqOn1) avec conditions de bord.

(D) Condition initiale. Supposons maintenant que, au temps $t = 0$, l'amplitude de la corde soit donnée par $f(x, 0) = u(x)$ et sa vitesse par $\partial_t f(x, 0) = v(x)$, où u et $v : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables données.

Faisons l'hypothèse (H) suivante : *il existe $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ tels que la fonction*

$$f(x, t) := \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(a_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right)$$

satisfasse la condition initiale. Calculer les intégrales

$$\int_0^\ell f(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) dx, \quad \int_0^\ell \partial_t f(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) dx$$

et en déduire que

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell v(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Conclure que, sous ces hypothèses, une solution de (EqOn1) satisfaisant aux conditions de bord et initiales, est donnée par

$$f(x, t) = \int_0^\ell G(x, t; \xi) u(\xi) d\xi + \int_0^\ell \partial_t G(x, t; \xi) v(\xi) d\xi$$

avec

$$G(x, t; \xi) := \sum_{n=0}^N \frac{2}{cn\pi} \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \xi\right).$$

(E) Problèmes qui restent ouverts. Les mêmes que ci-dessus... concrètement, pour une guitare, par exemple, la condition initiale à remplir serait $u(x)$ une fonction en triangle et $v(x) = 0$ (pincement de la corde au milieu, puis la lâcher) ; or, une telle fonction ne peut pas s'écrire sous forme de somme *finie* de fonctions trigonométriques. La question se pose si on peut l'écrire sous forme de *somme infinie* de fonctions trigonométriques.

3. L'équation du potentiel. Soit $R > 0$. On cherche les fonctions $f(x, y)$ tels que $\Delta f = 0$ et $f(x, y) = u_0(x, y)$ si $x^2 + y^2 = R^2$ (condition de bord sur le cercle de rayon R : distribution de charge donnée par une fonction u_0 sur ce cercle).

(A) Coordonnées polaires. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, posons $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ et $F(r, \phi) := f(x, y)$ avec $r > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$. La condition de bord s'écrit alors $F(R, \phi) = U_0(\phi)$ avec une fonction $U_0 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $U_0(0) = U_0(2\pi)$. Admettons le résultat suivant ("Laplacien en coordonnées polaires") :

$$(\Delta f)(r \cos \phi, r \sin \phi) = \left(\partial_r^2 F + \frac{1}{r} \partial_r F + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 F\right)(r, \phi).$$

Facultatif : démontrer cette formule (on a besoin de la règle de composition pour différentier des fonctions de plusieurs variables ; cf. cours "Analyse 2").

(B) Séparation des variables. Cherchons des solutions de la forme

$$F(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi).$$

Suivant la même démarche comme dans les exercices précédents, en déduire des EDO satisfaites par $R(r)$ et $\Phi(\phi)$; résoudre d'abord celle pour Φ (ne retenir que des solutions telles que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$), puis celle pour R (ne retenir que des solutions telles que $\lim_{r \rightarrow 0} R(r)$ existe dans \mathbb{R}). Conclure qu'on obtient ainsi les solutions, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(r, \phi) = (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))r^n.$$

Faisons l'hypothèse (H) suivante : *il existe $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ tels que la fonction*

$$F(r, \phi) := \sum_{n=0}^N (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))r^n$$

satisfasse la condition de bord $F(R, \phi) = U_0(\phi)$. Calculer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} F(R, t) \sin(nt) dt, \quad \int_0^{2\pi} F(R, t) \cos(nt) dt$$

et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} U_0(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} U_0(t) \sin(-nt) dt.$$

Conclure que, sous ces hypothèses, une solution de $\Delta f = 0$, satisfaisant aux conditions de bord, est donnée par

$$F(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \phi, t) U_0(t) dt$$

avec

$$K(r, \phi, t) := \sum_{n=0}^N \frac{r^n}{R^n} (\cos(nt) \cos(n\phi) + \sin(nt) \sin(n\phi)) = \sum_{n=0}^N \frac{r^n}{R^n} \cos(n(t - \phi))$$

(C) Montrer que, si $r < R$, la somme précédente $K = K_N$ converge pour $N \rightarrow \infty$, et calculer sa limite (“noyau de Poisson”). Indication : écrire $K(r, \phi, t)$ sous forme de partie réelle d’une fonction complexe.

5. Problème : Equation de la membrane vibrante. Par un passage aux coordonnées polaires, puis une séparation des variables, traiter l’équation de la membrane vibrante

$$\partial_t^2 f(x, y, t) = C(\partial_x^2 f(x, y, t) + \partial_y^2 f(x, y, t))$$

avec condition de bord $f(x, y, t) = 0$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et conditions initiales $f(x, y, 0) = u(x, y)$, $\partial_t f(x, y, 0) = v(x, y)$. (Indication : suivant le modèle de l’exercice précédent : séparation, en coordonnées polaires, des 3 variables r, ϕ, t ; l’EDO pour r est maintenant plus difficile à résoudre : au lieu des fonctions r^n , obtient comme solutions des *fonctions de Bessel*.)

6. Fonctions holomorphes et équations de CR. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (= \mathbb{C} -différentiable). En écrivant $F(x + iy) = f(x, y) + ig(x, y)$, et en prenant des limites en direction des deux axes, montrer que $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann (EqsCR).

Facultatif. Montrer que la réciproque est vraie aussi.

7. Équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques. Montrer que si $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est C^2 et satisfait les équations de Cauchy-Riemann (EqsCR), alors f et g sont harmoniques : $\Delta f = 0$ et $\Delta g = 0$. (Indication : utiliser le lemme de Schwarz.)

8. Polynômes harmoniques. Soit $f(x, y)$ un polynôme homogène de deux variables de la forme $f(x, y) = \sum_{n=0}^k a_{n, k-n} x^n y^{k-n}$. Supposons que f est harmonique : $\Delta f = 0$. En déduire une relation de récurrence pour les coefficients $a_{n, k-n}$ et montrer que $f(x)$ est la partie réelle d’un polynôme de la forme $F(x + iy) = \lambda(x + iy)^k$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

– Programme des colles de la semaine du 14/11 : jusqu’au C3 inclus ! –

C4 : Séries formelles

“Calcul formel”. L’objectif principal en analyse est l’étude de *fonctions*. Or, connaître une fonction $f : A \rightarrow B$ revient à connaître le “tableau des valeurs” : pour chaque $a \in A$ on donne la valeur $f(a) \in B$. Dans la pratique, surtout quand A est non-dénombrable (comme $A = \mathbb{R}$ ou un intervalle), on ne peut jamais “écrire” ce tableau. Pour cette raison, on s’intéresse à des “classes de fonctions” plus spécifiques, données par des “expressions” qu’on peut relativement bien “manipuler”. Par exemple :

- (a) les *polynômes* $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$;
- (b) les *fractions rationnelles* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$;
- (c) les *fonctions analytiques* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Dans ces cas, on peut exprimer les “opérations usuelles” (somme ; produit ; composée ; dérivée) directement en termes des coefficients, sans connaître le “tableau des valeurs de f ”. Autrement dit, on effectue des *opérations algébriques*, souvent sous forme d’un *algorithme* que l’on peut programmer sur ordinateur – pour l’apprentissage, il est utile d’écrire quelques programmes soi-même, avant d’utiliser des logiciels existants et plus puissants ; cf. pour une liste de tels logiciels :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Logiciel_de_calcul_formel#Quelques_logiciels_de_calcul_formel

Ces algorithmes sont “purements algébriques” dans le sens qu’ils ne calculent jamais une limite directement ; on remplace des techniques “analytiques” par des calculs “formels”, valables pour un corps de base quelconque \mathbb{K} (non seulement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), en écartant toutes les questions de convergence etc. Pour l’exemple (c), c’est le concept de *série formelle* qui résume cette démarche.

C4.1. Définition. Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps. Une série formelle à coefficients dans \mathbb{K} , notée $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, n’est rien d’autre que la suite de coefficients (a_0, a_1, \dots) . Le symbole X est une indéterminée et ne représente aucun élément de \mathbb{K} . S’il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \geq N$, alors $F(X)$ est un polynôme. L’ensemble des séries formelles est notée $\mathbb{K}[[X]]$, et ainsi l’ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est une partie de $\mathbb{K}[[X]]$.

On définit deux opérations sur $\mathbb{K}[[X]]$: soit $F(X) = \sum_n a_n X^n$ et $G(X) = \sum_n b_n X^n$ deux séries formelles. L’addition est définie par

$$(F + G)(X) := \sum_n a_n X^n + \sum_n b_n X^n := \sum_n (a_n + b_n) X^n = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots),$$

et le produit de Cauchy est défini par

$$(F \cdot G)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k,$$

$$\text{où } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2 : j_1 + j_2 = k} a_{j_1} b_{j_2}.$$

Remarques.

- (1) Ne pas confondre le produit de Cauchy avec le “produit point par point” de suites !
- (2) La suite $(0, 1, 0, \dots)$ s’identifie avec la série $F(X) = X$. La définition du produit de Cauchy assure d’avoir la relation $X \cdot X = (0, 0, 1, 0, \dots) = X^2$, etc. – cf. exercice 2 !

C4.2. Théorème. Avec addition et produit définis ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles est un anneau commutatif avec neutre $1 = (1, 0, \dots)$.

C4.3. Théorème. Un élément $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ de l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ est inversible si, et seulement si, son coefficient a_0 est inversible dans \mathbb{K} .

La preuve montre que l'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ de $F(X)$ est alors donnée par récurrence

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}.$$

C4.4. Remarque. Si $F(X)$ est un *polynôme*, on peut évaluer P en un point $a \in \mathbb{K}$. Ainsi on définit une application "évaluation en a "

$$\text{ev}_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}, \quad P(X) = b_0 + \dots + b_n X^n \mapsto P(a) := b_0 + b_1 a + \dots + b_n a^n.$$

Ceci est un homomorphisme d'anneaux : $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$ et $(P \cdot Q)(a) = P(a)Q(a)$. Si $F(X)$ est une série formelle, on ne peut plus "évaluer F au point a " (pour cela il faudrait avoir une notion de convergence, donc faire de l'analyse). La seule exception est le point $a = 0$: pour $F(X) = \sum_n a_n X^n$, on définit $F(0) := a_0$. Alors

$$\mathbb{K}[[X]] \rightarrow \mathbb{K}, \quad F(X) = \sum_n a_n X^n \mapsto F(0) := a_0$$

est un homomorphisme d'anneaux. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[[X]]$, noté

$$\mathbb{K}[[X]]_0 = \left\{ \sum_n a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]] \mid a_0 = 0 \right\}.$$

C4.5. Définition. Soient $G(X) = \sum_k b_k X^k$ et $F(X) = \sum_k a_k X^k$ deux séries formelles, et supposons que $a_0 = 0 = b_0$. Alors la composée $G \circ F(X)$ est la série définie par

$$G \circ F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n, \quad \text{où } c_n = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^k, |\alpha|=n} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}.$$

Notation : cf. C1.14 pour les multi-indices – par exemple, pour $n = 1, 2, 3$, on a

$$c_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2 a_1 a_1, \quad c_3 = b_1 a_3 + b_2 (a_1 a_2 + a_2 a_1) + b_3 (a_1 a_1 a_1).$$

C4.6. Théorème. On a les règles de calcul, pour $F, G, H \in \mathbb{K}[[X]]_0$,

(1) (*associativité*) : $G \circ (F \circ H) = (G \circ F) \circ H$, de plus, $\text{id}(X) = X = (0, 1, 0, \dots)$ est neutre pour la composition : $F \circ \text{id} = F = \text{id} \circ F$.

(2) Soit $F(X) \in \mathbb{K}[[X]]_0$. Alors il existe $G(X) \in \mathbb{K}[[X]]_0$ tel que $G \circ F(X) = X$ et $F \circ G(X) = X$ si, et seulement si, a_1 est inversible dans \mathbb{K} . Ainsi l'ensemble

$$\{f(X) \in \mathbb{K}[[X]]_0 \mid a_1 \in \mathbb{K}^\times\}$$

est un groupe par rapport à la composition.

(3) (*distributivité à gauche*) : $(G+F) \circ H = G \circ H + F \circ H$ et $(G \cdot F) \circ H = (G \circ H) \cdot (F \circ H)$

C4.7. Définition. La dérivée formelle d'une série formelle $F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ est

$$F'(X) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} X^k$$

C4.8. Théorème. La dérivée formelle satisfait les “*règles usuelles de dérivation*” :

- i) elle est linéaire : $(F+G)' = F' + G'$, $(\lambda F)' = \lambda F'$;
- ii) elle satisfait la règle de Leibniz : $(FG)' = F'G + FG'$;
- ii) et la “règle de chaîne” : $(G \circ F)(X) = (G' \circ F)(X) \cdot F'(X)$.

Avec ces outils, une grande partie de raisonnements en apparence “analytiques” et vus en cours peut se transposer en des preuves purement algébriques.

Exercices pour le complément C4

1. Inversion dans l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$. Pour les séries formelles $F(X)$ suivantes, montrer qu'elles sont inversibles dans $\mathbb{K}[[X]]$ et calculer l'inverse (qu'on note $(\frac{1}{F})(X)$) :

- (1) $F(X) = 1 - X$
- (2) $F(X) = 1 - X - X^2$
- (3) $F(X) = 1 + X + X^2$
- (4) $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$

2. Polynômes. Montrer que l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}[[X]]$, mais qu'il n'est pas stable par rapport à l'inversion.

3. Identités remarquables. Montrer : si la caractéristique de \mathbb{K} est nulle, on peut définir les séries formelles $\exp(aX)$ avec $a \in \mathbb{K}$, $\sin(X)$ et $\cos(X)$. Montrer que, pour $a, b \in \mathbb{K}$, $\exp(aX) \cdot \exp(bX) = \exp((a+b)X)$ et $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$. Montrer aussi que la série tangente $\tan(X)$ est définie, mais non la série du cotangent.

4. Distributivité. Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas de “distributivité à droite” dans le théorème C4.6.

5. Composée. Étant donné $F(X) \in \mathbb{K}[[X]]_0$ avec $a_1 \in \mathbb{K}^\times$, calculer les premiers 4 termes de la série formelle G du point (2) du théorème C4.6.

Exemple : appliquer ce calcul pour l'exemple $F(X) = \exp(X) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$. Que retrouve-t-on ? Y a-t-il un autre moyen pour arriver “de façon formelle” à ce résultat ?

Remarque : une formule générale pour G est connue (formule d'inversion de Lagrange, cf. http://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series#The_Lagrange_inversion_formula).

6. Une distance sur $\mathbb{K}[[X]]$. Soit $F(X) = \sum_n a_n X^n$ et $G(X) = \sum_n b_n X^n$ deux séries formelles. Posons $d(F, G) := 0$, si $F = G$, et sinon :

$$d(F, G) := 2^{-k}, \quad \text{où } k := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n - b_n \neq 0\}.$$

Montrer que d satisfait les propriétés d'une distance:

(D1) $d(F, G) \geq 0$ et $d(F, G) = 0$ ssi $F = G$;

(D2) $d(F, G) = d(G, F)$;

(D3) $d(F, H) \leq d(F, G) + d(G, H)$.

(ainsi $\mathbb{K}[[X]]$ devient un espace métrique.) Pour $\varepsilon = 2^{-1000}$, décrire la “boule” $B_\varepsilon(G) := \{F \in \mathbb{K}[[X]] \mid d(F, G) < \varepsilon\}$.

7. Séries formelles en plusieurs variables.

(1) On remplace, dans toutes les définitions de ce chapitre, le corps \mathbb{K} par un anneau commutatif quelconque avec neutre 1. Montrer que tout les résultats restent valables, à condition de lire $\mathbb{K}^\times = \{r \in \mathbb{K} \mid \exists s \in \mathbb{K} : sr = 1\}$ (groupe des éléments inversibles).

(2) En notant deux inconnues X_1 et X_2 , conclure que l’anneau

$$\mathbb{K}[[X_1, X_2]] := (\mathbb{K}[[X_1]])[[X_2]]$$

est bien défini. Montrer qu’il s’agit ici, en tant qu’ensemble, de l’ensemble des suites doubles $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, qu’on note sous la forme $\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} X_1^n X_2^m$. Avec ces notations, décrire addition et produit de cet anneau. Facultatif. Etudier d’autres opérations (composée, dérivée,...) dans cet anneau.

(3) Par récurrence, définir et décrire les anneaux $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$.

8. Corps des fractions.

(1) Montrer que : si \mathbb{K} est un anneau intègre, alors $\mathbb{K}[[X]]$ l’est aussi. Conclure qu’il existe un corps de fractions de $\mathbb{K}[[X]]$, noté $\mathbb{K}((X))$.

(2) Si \mathbb{K} est un corps, décrire $\mathbb{K}((X))$.

C5 : Compléments sur l’analyse de Fourier

L’analyse de Fourier se décline en deux versions :

(A) une “version discrète” : la théorie des séries de Fourier ;

(B) une “version continue” : la théorie de la transformée de Fourier.

Le cours “Analyse 3” comprend une introduction succincte au sujet (A). Le sujet (B) est tout aussi important – de plus , il fournit une excellente occasion de “mettre en œuvre” les intégrales impropres. Commençons par revoir (A) :

C5.1. Séries de Fourier : résumé. La théorie a pour objet la relation entre deux objets “duals” l’un de l’autre : d’une part, les *fonctions périodiques* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, et d’autre part, les *coefficients de Fourier* $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Etant donnée f , on trouve les c_k par la formule

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt.$$

Etant donnée les coefficients $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, on obtient f comme série

$$f(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{-\frac{2\pi i k t}{T}}.$$

Sous certaines conditions sur f , resp. sur les c_k , ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, pour des “bonnes” fonctions (classe C^1 , par exemple), on a une *formule d'inversion*

$$(I) \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{-\frac{2\pi i k x}{T}}.$$

Cette correspondance entre fonctions périodiques f et coefficients $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a des relations remarquables avec les “opérations usuelles” sur les fonctions : par exemple, elle met en relation le produit usuel avec le *produit de convolution* et la différentiation avec la multiplication par $2\pi i k$; finalement, cette correspondance est une *isométrie* dans le sens qu'elle vérifie l'*égalité de Parseval*.

D'un point de vue un peu plus abstrait, les fonctions périodiques doivent être vues comme des fonctions $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, définies sur le *cercle* S^1 , et les coefficients de Fourier comme une fonction $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \mapsto c_k$ définie sur les *entiers* \mathbb{Z} . On remarque que (S^1, \cdot) et $(\mathbb{Z}, +)$ sont des *groupes*. On dit que les groupes S^1 et \mathbb{Z} sont des *groupes duaux l'un de l'autre* : l'application

$$S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad (u, k) = (e^{2\pi i t}, k) \mapsto e^{2\pi i k t} = u^k$$

est un peu comme un produit scalaire, faisant apparaître l'un comme l'“espace dual” de l'autre. Le groupe \mathbb{Z} est un “groupe discret” (dénombrable), et le groupe S^1 est un “groupe compact” (fermé et borné). Dans la théorie de la transformée de Fourier, la paire de groupes duaux (S^1, \mathbb{Z}) sera remplacée par la paire de groupes duaux (\mathbb{R}, \mathbb{R}) :

C5.2. Définition. L'intégrale de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$\hat{f}(y) := \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^C f(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

pour $y \in \mathbb{R}$, quand cette limite existe. Si elle existe pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad y \mapsto \hat{f}(y)$$

s'appelle la transformée de Fourier de f . Un des buts dans la suite sera de montrer qu'on a un analogue de la formule d'inversion (I), à savoir, pour des “bonnes” fonctions f :

$$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x), \quad \text{i.e. :} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i y x} dy, \quad (I')$$

et que la transformée de Fourier a des liens intéressants avec les “opérations usuelles” sur les fonctions. Il y a aussi un analogue de l'égalité de Parseval, qui s'appelle la formule de Plancherel. Commençons par décrire quelques espaces de “bonnes fonctions” :

C5.3. Définition. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance modérée s'il existe une constante $A \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| < A \frac{1}{1+x^2}$. On dit que f est à décroissance rapide si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, existe une constante $A_n \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| < A_n \frac{1}{(1+x^2)^n}$. (Autrement dit, pour tout polynôme P , $\|fP\|_\infty < \infty$.) On note $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à morceaux qui sont à décroissance modérée.

C5.4. Lemme. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^C f(t) dt$$

existe, et la transformée de Fourier \hat{f} existe.

C5.5. Exemples.

(1) Soit $f(x) = 1_{[-a,a]}$ pour $a > 0$ la “fonction porte”. Alors $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est le sinus cardinal

$$\hat{f}(y) = \frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}.$$

(2) La fonction $f_\lambda(x) := e^{-\lambda|x|}$ pour $\lambda > 0$ est continue et à décroissance rapide. Par un calcul direct on trouve que

$$\hat{f}_\lambda(y) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 y^2}.$$

Remarque : pour $\lambda \gg 1$, le graphe de la fonction f_λ est “localisée” près de l’origine, et celui de \hat{f}_λ est “très large” ; pour $\lambda \ll 1$, on a une situation réciproque. Ceci est une manifestation de la “relation d’incertitude entre temps et fréquence” : *on ne peut pas “localiser simultanément” les descriptions temporelles et fréquentielles.*

C5.6. Règles de calcul. Pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$,

(1) $\widehat{\tau_a f}(y) = e^{2\pi i ay} \hat{f}(y)$ où $(\tau_a f)(x) = f(x + a)$ est la translatée de f par a ;

(2) $\tau_a \hat{f}$ est la transformée de la fonction $x \mapsto e^{-2\pi i xa} f(x)$;

(3) la transformée de $x \mapsto f(rx)$ pour $r > 0$ est $r^{-1} \hat{f}(r^{-1}y)$;

(4) \hat{f} est (im)paire si f est (im)paire ;

(5) Posons $f^*(x) := \overline{f(-x)}$. Alors on a $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$.

En particulier, si $f(-x) = \overline{f(x)}$, alors \hat{f} est réelle.

La preuve est un exercice simple en utilisant des changements de variable. Les règles de calcul suivantes concernent la différentiation. Pour pouvoir les énoncer, nous devons d’abord définir un “bon espace de fonctions différentiables” :

C5.7. Définition. L’espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l’ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que f , ainsi que toutes les dérivées $f^{(k)}$, sont à décroissance rapide.

Exemples. Il est clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, et l’inclusion est stricte.

(1) La gaussienne $f(x) = e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) Toute “fonction test” (fonction C^∞ à support compact, cf. TD1) appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

C5.8. Théorème.

(1) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f'}(y) = 2\pi i y \hat{f}(y)$.

(2) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors \hat{f} est de classe C^∞ , et alors $\frac{d}{dy} \hat{f}(y)$ est la transformée de la fonction $x \mapsto -2\pi i x f(x)$.

(3) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la convolution de f et de g

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t) dt$$

existe, et on a

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}, \quad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Exercice. La convolution est bilinéaire, commutative et associative.

C5.9. Théorème-Exemple. Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ la gaussienne. Alors on a $\hat{f} = f$.

Le calcul de cette intégrale de Fourier est un grand classique d'analyse : d'abord, on montre que $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$ (par exemple, en écrivant I^2 comme une intégrale sur \mathbb{R}^2 , puis en passant en coordonnées polaires). Ensuite, en utilisant les règles (1) et (2) du théorème, on montre que \hat{f} est solution de la même équation différentielle que f , à savoir

$$f'(x) = -2\pi x f(x).$$

On conclut par unicité de la solution, en connaissant la valeur $I = \hat{f}(0) = f(0)$.

C5.10. Corollaire. Pour $r > 0$, soit $K_r(x) := \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{\pi x^2}{r}}$. Alors $\widehat{K_r}(y) = e^{-\pi r y^2}$.

C5.11. Théorème. La famille $(K_r)_{r>0}$ est un bon noyau, i.e., elle vérifie :

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} K_r(x) dx = 1$;

(b) il existe une constante M telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |K_r(x)| dx < M$;

(c) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{r \rightarrow 0} (\int_{-\infty}^{-\delta} |K_r(x)| dx + \int_{\delta}^{\infty} |K_r(x)| dx) = 0$.

Il s'ensuit que, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et si $r_n \rightarrow 0$, on a convergence uniforme

$$f * K_{r_n} \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Les propriétés (a), (b), (c) sont des conséquences simples, par des changements de variables, du calcul de l'intégrale de Gauss I ci-dessus ; elles signifient que la "masse" de K_r se concentre à l'origine pour $r \rightarrow 0$. On dit aussi que K_{r_n} "tend vers la distribution de Dirac", et (1) traduit le fait que la distribution de Dirac est l'élément neutre pour la convolution. Pour prouver (1), on écrit

$$(f * K_r - f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) K_r(t) dt,$$

on prend la valeur absolue et on partage l'intégrale en deux parties $\int_{|t|<\delta} + \int_{|t|\geq\delta}$. La fonction f est bornée par une constante K , et, étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que $|t| < \eta$ implique $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$. Si on choisit $\delta < \eta/2$, la première intégrale est alors plus petite que ε . D'après (c), la deuxième intégrale est plus petite que ε pour r proche de 1. Ensemble, cela implique (1).

C5.12. Lemme. Par $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$ on définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On note $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ la norme euclidienne correspondant à ce produit scalaire.

C5.13. Théorème fondamental. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors

(1) formule de multiplication : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx$

(2) formule d'inversion : $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i y x} dy$

(3) L'application "transformée de Fourier" $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \mapsto \hat{f}$ est une bijection telle que $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})f(x) = f(-x)$.

(4) formule de Plancherel : $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy$.
Autrement dit, l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une isométrie.

La preuve de (1) est une application directe du théorème de Fubini. Pour prouver (2), on se ramène, par une translation, au cas $x = 0$. Pour montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) dy = f(0)$, soit $g(x) = e^{-\pi r x^2}$. On a alors $\hat{g} = K_r$. D'après (1),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_r(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-\pi r x^2} dx.$$

Pour $r \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) dy$, et le membre de gauche vers $f(0)$, d'après C5.11. Ensuite, (3) est une conséquence directe de (2), et finalement (4) s'ensuit de (1) et (2) en utilisant C5.6 (5).

C5.14. Remarque. La partie (4) implique que $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$. Ceci, ainsi que la formule d'inversion, reste vrai sous des hypothèses plus générales (par exemple, que f ainsi que \hat{f} soient dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$).

Un lien important très direct entre transformation et séries de Fourier est donné par la formule sommatoire de Poisson, cf. exercice 5 ci-dessous.

Exercices pour le complément C5

1. Valeurs propres de la transformée de Fourier. Montrer que, si f est une fonction paire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $g := f + \hat{f}$ est une fonction telle que $\hat{g} = f$. (Utiliser la formule d'inversion.) De manière analogue, déterminer les valeurs propres de la transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et montrer que \mathcal{F} est diagonalisable.

2. Exemples. On admettra que la formule de Plancherel et la formule d'inversion (aux points où f est continue) sont valables aussi pour les fonctions de l'exemple C5.5 (1) et (2). Ecrire ces formules.

3. Retour aux EDP. I : équation de la corde vibrante. On considère l'EDP $f_{tt} = C f_{xx}$ avec $C > 0$ (C3, exercice 2) avec condition initiale $f(x, 0) = u(x)$ et $\partial_t f(x, 0) = v(x)$ où u et v sont des fonctions C^1 par morceaux.

(1) Condition de bord $f(0, t) = 0 = f(\ell, t)$ avec $\ell > 0$. Revoir l'exercice 2 de C3 et montrer qu'une solution existe, et qu'elle est donnée par les formules y données, avec sommation de 0 à ∞ au lieu de 0 à N . (Utiliser les séries de Fourier.)

(2) Sans condition de bord ("corde de longueur infinie"), mais en supposant que u et v appartiennent à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Suivre le procédé du (1), en utilisant la transformation de Fourier au lieu des séries de Fourier.

4. Retour aux EDP. II : équation de la chaleur. On considère l'EDP $f_t = C f_{xx}$ avec $C > 0$ (C3, exercice 1) avec condition initiale $f(x, 0) = u(x)$ où u est une fonction C^1 par morceaux.

(1) Condition de bord $f(0, t) = 0 = f(\ell, t)$ avec $\ell > 0$. Revoir l'exercice 1 de C3 et montrer qu'une solution existe, et qu'elle est donnée par les formules y données, avec sommation de 0 à ∞ au lieu de 0 à N . (Utiliser les séries de Fourier.)

(2) Sans condition de bord (“bâton de longueur infinie”), mais en supposant que u appartient à l’espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Suivre le procédé du (1), en utilisant la transformation de Fourier au lieu des séries de Fourier.

5. Formule sommatoire de Poisson. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que $F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que cette convergence est uniforme, et que F_1 est 1-périodique. Calculer les coefficients de Fourier $c_k(F_1)$.

(2) Montrer que $F_2(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ converge uniformément sur \mathbb{R} , et que F_2 est 1-périodique.

(3) Démontrer la formule sommatoire de Poisson : $F_1 = F_2$, i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

(Indication : montrer que les deux membres sont des fonctions continues ; en déduire qu’il suffit de montrer que leurs coefficients de Fourier coïncident. Ceux du membre de droite sont $c_k = c_k(f)$; calculer alors ceux du membre de gauche.)

Applications :

(4) Fixons $r > 0$ et soit $f_r(x) := e^{-r\pi x^2}$. Ecrire la formule sommatoire dans ce cas. En déduire que la fonction $\vartheta(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$ vérifie $\frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta(1/s) = \vartheta(s)$.

(5) Fixons $a > 0$ et soit $f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$. Ecrire la formule dans ce cas

6. Théorème d’approximation de Weierstrass Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer qu’on peut approcher f uniformément par des polynômes : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$. (Indication : soit Q une somme partielle de la série de Fourier de K_r , et observer que $P := f * Q$ est un polynôme.)