

# Thom-Sebastiani pour les intégrales-fibres.

Daniel Barlet.\*

14/09/08

## Abstract

The aim of this article is to prove a Thom-Sebastiani theorem for the asymptotics of the fiber-integrals. This means that we describe the asymptotics of the fiber-integrals of the function  $f \oplus g : (x, y) \rightarrow f(x) + g(y)$  on  $(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, (0, 0))$  in term of the asymptotics of the fiber-integrals of the holomorphic germs  $f : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  and  $g : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . This reduces to compute the asymptotics of a convolution  $\Phi_* \Psi$  from the asymptotics of  $\Phi$  and  $\Psi$ .

To obtain precise results we have to compute the constants coming from the convolution process. We show that there are given by rational fractions of Gamma factors. This enable us to show that these constants do not vanish.

As a corollary we obtain that the roots of the b-function of  $f \oplus g$  are modulo  $\mathbb{Z}$  sum of roots of the b-functions of  $f$  and  $g$  and conversely.

AMS Classification (2000) : 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.

Key words : Asymptotic expansions, fiber-integrals, Thom-Sebastiani theorem, Bernstein polynomial (b-function).

---

\*Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502  
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,  
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.  
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

## Contents

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction.</b>                  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Le théorème de convolution.</b>    | <b>4</b>  |
| 2.1      | Fubini. . . . .                       | 4         |
| 2.2      | Le théorème de convolution. . . . .   | 5         |
| 2.3      | Démonstration du corollaire. . . . .  | 12        |
| <b>3</b> | <b>Calcul des constantes.</b>         | <b>13</b> |
| 3.1      | Préliminaires. . . . .                | 13        |
| 3.2      | Le premier cas. . . . .               | 20        |
| 3.3      | Le second cas. . . . .                | 23        |
| 3.4      | Le dernier cas. . . . .               | 25        |
| 3.5      | Le calcul de $\gamma_{1,1}$ . . . . . | 26        |
| <b>4</b> | <b>Références.</b>                    | <b>30</b> |

## 1 Introduction.

Le but du present article est de montrer directement un théorème à la "Thom-Sebastiani" (voir [S.-T. 71]) pour les développements asymptotiques des intégrale-fibres d'une fonction de la forme  $(x, y) \rightarrow f(x) + g(y)$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^p$  et  $\mathbb{C}^q$  respectivement. Il résulte du théorème général de développement asymptotique des intégrale-fibres (voir [B. 82]), qu'une intégrale-fibre, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$s \rightarrow F_\varphi(s) = \int_{f=s} \frac{\varphi}{df \wedge d\bar{f}}$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe non constante sur une variété complexe  $U$  de dimension  $n + 1$  et  $\varphi$  une  $(n + 1, n + 1)$ -forme  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $U$ , peut s'écrire, au voisinage de  $s = 0$ ,

$$F_\varphi(s) = \sum_{\alpha \in A, j \in [0, \mu(\alpha)]} \theta_{\alpha, j}(s) \cdot |s|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s|)^j + \xi(s)$$

où les fonctions  $\theta_{j, \alpha}$  et  $\xi$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $s = 0$ , où  $A \subset ]-1, +\infty[ \cap \mathbb{Q}$  est un ensemble fini et où  $\mu : A \rightarrow \mathbb{N}$  est une application à valeurs dans  $[0, n]$ . Nous dirons qu'une fonction qui admet une telle écriture au voisinage de l'origine admet un développement asymptotique standard uniforme<sup>1</sup> de type  $(A, \mu)$  en  $s = 0$ .

<sup>1</sup>nous considérons ici des fonctions "uniformes" contrairement aux fonctions holomorphes "multiformes" que l'on obtient dans les intégrales "à la Malgrange", c'est à dire en intégrant des formes holomorphes sur des familles horizontales de cycles (voir [M. 74]).

En fait, le résultat que nous présentons consiste essentiellement à montrer la stabilité par convolution de la classe des fonctions admettant à l'origine de  $\mathbb{C}$  des "développements asymptotiques standards uniformes", en précisant les exposants et les degrés des termes logarithmiques de la convolée à partir des informations correspondantes pour les fonctions initiales.

Donnons une définition qui facilitera l'énoncé de notre résultat.

**Définition 1.0.1** *Pour deux types donnés  $(A, \mu)$  et  $(B, \nu)$  nous définirons le type  $(A * B, \mu * \nu)$  de la façon suivante :*

$$A * B = \{\alpha + \beta + 1, \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

$$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta) \quad \text{quand } \alpha, \beta \text{ et } \alpha + \beta + 1 \text{ ne sont pas dans } \mathbb{N}.$$

$$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta) + 1 \quad \text{quand } \alpha + \beta + 1 \in \mathbb{N}, \alpha \text{ et } \beta \text{ non dans } \mathbb{N}.$$

$$(\mu * \nu)(\alpha + \beta + 1) = \mu(\alpha) + \nu(\beta) - 1 \quad \text{quand } \alpha \text{ ou } \beta \text{ (ou les deux) sont dans } \mathbb{N}.$$

Précisément nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 1.0.2 (Thom-Sebastiani pour les développements asymptotiques.)**

*Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^p$  et  $\mathbb{C}^q$  respectivement. Supposons que les intégrale-fibres de  $f$  et  $g$  admettent des développements asymptotiques standards uniformes de type respectifs  $(A, \mu)$  et  $(B, \nu)$ . Alors les intégrale-fibres de la fonction  $f \oplus g : (x, y) \rightarrow f(x) + g(y)$  admettent des développements asymptotiques standards uniformes de type  $(A * B, \mu * \nu)$ .*

Une conséquence de ce résultat est le théorème suivant, qui ne surprendra pas les spécialistes, sur le polynôme de Bernstein à l'origine d'une fonction de la forme  $f(x) + g(y)$ , qui ne me semble pas connu en général.

**Corollaire 1.0.3 (Thom-Sebastiani pour le polynôme de Bernstein.)**

*Soient  $f : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  et  $g : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  deux germes non constants de fonctions holomorphes. Alors toute racine du polynôme de Bernstein à l'origine du germe  $f \oplus g : (x, y) \rightarrow f(x) + g(y)$  est modulo  $\mathbb{Z}$  somme d'une racine du polynôme de Bernstein de  $f$  en 0 et d'une racine du polynôme de Bernstein de  $g$  en 0.*

*Réciproquement, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des racines respectivement des polynômes de Bernstein de  $f$  et  $g$  à l'origine, il existe une racine  $\gamma$  du polynôme de Bernstein de  $f \oplus g : (x, y) \rightarrow f(x) + g(y)$  qui est congrue modulo  $\mathbb{Z}$  à  $\alpha + \beta$ .*

La preuve de ce corollaire donne en fait un résultat bien plus précis (voir le paragraphe 2.3).

Mais au delà du résultat qualitatif du théorème 1.0.2 qui permet de prévoir quel terme peut apparaître dans le développement asymptotique standard uniforme de la convolution de deux fonctions admettant de tels développements asymptotiques, il est important de savoir si les termes "candidats" donnés dans ce théorème donnent effectivement des termes non nuls pour la convolée. Ce problème est assez délicat, et

en présence de plusieurs termes dans les développements asymptotiques des fonctions initiales, des phénomènes de compensations peuvent se produire et faire disparaître un terme attendu. Aussi dans la seconde partie de cet article étudions-nous en détail le cas de la convolution de deux fonctions admettant un seul terme singulier non nul dans leurs développements asymptotiques respectifs<sup>2</sup>. Nous montrons dans ce cas que le terme attendu pour la convolution est effectivement non nul.

Il n'est pas difficile de se convaincre que pour ce faire on doit calculer précisément les constantes qui apparaissent lors de l'opération de convolution, ce qui amène à faire toute une série de calculs qui sont assez fastidieux et pas aussi simples qu'on pourrait le penser à priori.

Mais, heureusement, les constantes trouvées s'expriment dans tous les cas comme des "fractions rationnelles de facteurs gammas". On peut donc montrer la non nullité des constantes qui interviennent et donc répondre complètement à la question posée dans le cas considéré.

De plus le calcul explicite de ces constantes permettra à l'utilisateur potentiel de déterminer dans le cas général si un phénomène de compensation se produit dans le cas précis où il souhaite savoir si le développement asymptotique de la fonction convolée admet effectivement le terme "candidat" qui l'intéresse. La proposition 2.3.1 est également intéressante pour se ramener aux cas étudiés dans le chapitre 3, comme on le montrera dans la preuve du corollaire 1.0.3.

## 2 Le théorème de convolution.

### 2.1 Fubini.

Commençons par montrer comment le théorème de Fubini permet de ramener notre problème à la détermination du développement asymptotique à l'origine d'une convolution.

**Proposition 2.1.1** *Soient  $f : X \rightarrow D$  et  $g : Y \rightarrow D$  des représentants de Milnor de deux germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^p$  et  $\mathbb{C}^q$  respectivement. Pour  $\rho$  (resp.  $\sigma$ ) une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $X$  (resp. dans  $Y$ ) notons  $\Phi_{f,\rho}$  (resp.  $\Psi_{g,\sigma}$ ) l'intégrale fibre*

$$\Phi_{f,\rho}(s) := \int_{f(x)=s} \rho(x) \cdot \frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}} \quad (\text{et respectivement})$$

$$\Psi_{g,\sigma}(t) := \int_{g(y)=t} \sigma(y) \cdot \frac{dy \wedge d\bar{y}}{dg \wedge d\bar{g}}$$

---

<sup>2</sup>en fait on regroupe ensemble les différentes puissances de  $\text{Log}|s|$  correspondant aux mêmes exposants pour  $s$  et  $\bar{s}$ .

Alors on a l'égalité, pour  $s \in \mathbb{C}$  :

$$\int_{f(x)+g(y)=s} \rho(x).\sigma(y).\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge \overline{d(f+g)}} = \int_{\mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u).\Psi_{g,\sigma}(u).du \wedge d\bar{u}.$$

PREUVE. Commençons par remarquer que, d'après le Nullstellensatz, il existe un entier  $N$  en une forme  $\omega$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $Supp(\rho)$  dans  $\mathbb{C}^p$  vérifiant

$$\omega \wedge df \wedge d\bar{f} = |f(x)|^{2N}.dx \wedge d\bar{x}.$$

On a alors, au voisinage de  $Supp(\rho) \times Supp(\sigma)$ , l'égalité

$$\omega \wedge dy \wedge d\bar{y} \wedge d(f+g) \wedge \overline{d(f+g)} = |f(x)|^{2N}.dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}.$$

On peut alors écrire, toujours au voisinage de  $Supp(\rho) \times Supp(\sigma)$ ,

$$\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge \overline{d(f+g)}} = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}} \wedge dy \wedge d\bar{y}.$$

Alors le Théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} & \int_{f(x)+g(y)=s} \rho(x).\sigma(y).\frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{d(f+g) \wedge \overline{d(f+g)}} = \\ & \int_{y \in \mathbb{C}^q} \sigma(y).dy \wedge d\bar{y} \int_{f(x)=s-g(y)} \rho(x).\frac{dx \wedge d\bar{x}}{df \wedge d\bar{f}} = \\ & \int_{u \in \mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u) \cdot \int_{g(y)=u} \sigma(y).\frac{dy \wedge d\bar{y}}{dg \wedge d\bar{g}} = \\ & \int_{u \in \mathbb{C}} \Phi_{f,\rho}(s-u).\Psi_{g,\sigma}(u).du \wedge d\bar{u} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.2 Le théorème de convolution.

Montrons maintenant notre théorème de développement asymptotique pour une convolution.

**Théorème 2.2.1** *Considérons deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  strictement plus grands que  $-1$  et soient  $\theta$  et  $\eta$  deux fonctions dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ , et posons, pour  $s \in \mathbb{C}^*$ ,*

$$F_{\alpha,\beta,j,k}(s) := \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{\mathbb{C}} \theta(s-u).\eta(u).|s-u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}.$$

Alors il existe des fonctions  $(\zeta_l)_{l \in [0, L]}$  et  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$  telles que l'on ait

$$F_{\alpha, \beta, j, k}(s) = \sum_{l=0}^L \zeta_l(s) \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot (\text{Log}|s|^2)^l + \xi(s)$$

où l'on a

- $L = j + k$  si  $\alpha + \beta + 1 \notin \mathbb{N}$ ,
- $L = j + k + 1$  si  $\alpha + \beta + 1 \in \mathbb{N}$  avec  $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{N}^2$ ,
- $L = j + k - 1$  si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ .

De plus, on a  $L = -1$  dès que  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $j = 0$  ou, symétriquement, dès que  $\beta \in \mathbb{N}$  et  $k = 0$ .

DÉMONSTRATION. Nous la ferons en plusieurs étapes.

PREMIÈRE ÉTAPE. Remarquons déjà que les conditions  $\alpha > -1$  et  $\beta > -1$  assurent que, pour  $s \neq 0$  la fonction intégrée est localement intégrable. De plus le support compact de la fonction  $\eta$  montre l'intégrabilité globale. La fonction est donc bien définie sur  $\mathbb{C}^*$ .

Le changement de variable  $v = s - u$  dans l'intégrale définissant la fonction  $F_{\alpha, \beta, j, k}$  montre que les triplets  $(\theta, \alpha, j)$  et  $(\eta, \beta, k)$  jouent des rôles symétriques.

Par ailleurs il est clair que pour  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $j = 0$  on a une convolution entre une fonction  $\mathcal{C}_c^\infty$  est une fonction intégrable à support compact. On obtient donc une fonction  $\mathcal{C}_c^\infty$ .

SECONDE ÉTAPE. Fixons  $\varepsilon > 0$ . L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{|u| \geq \varepsilon} \theta(s - u) \cdot \eta(u) \cdot |s - u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s - u|^2)^j \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

donne manifestement une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert  $\{|s| < \varepsilon/2\}$ , puisque maintenant la fonction intégrée est  $\mathcal{C}^\infty$  en  $s$  et majorée par une fonction intégrable fixe ainsi que chacune de ses dérivées partielles en  $s, \bar{s}$ .

Pour prouver l'existence du développement asymptotique à l'origine de la fonction  $F_{\alpha, \beta, j, k}$  il suffit donc de le faire pour la fonction obtenue en intégrant seulement sur le disque  $\{|u| \leq \varepsilon\}$ .

TROISIÈME ÉTAPE. Montrons maintenant que si la fonction  $\theta$  est plate à l'ordre  $N \geq 1$  à l'origine, alors la fonction  $F_{\alpha, \beta, j, k}$  est de classe  $\mathcal{C}^{N-1}$  au voisinage de l'origine. Comme notre hypothèse permet d'écrire

$$\theta(v) = \sum_{i=0}^{N+1} v^i \cdot \bar{v}^{N-i+1} \cdot \theta_i(v)$$

où les fonctions  $\theta_i$  sont dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ , il s'agit de voir que, pour chaque  $i \in [0, N+1]$ , la fonction  $s \mapsto G_i(s)$  définie par l'intégrale

$$\int_{|u| \leq \varepsilon} (s-u)^i \cdot \overline{(s-u)}^{N-i+1} \cdot \theta_i(s-u) \cdot \eta(u) \cdot |s-u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s-u|^2)^j \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

est de classe  $\mathcal{C}^{N-1}$  au voisinage de l'origine. Montrons ceci par récurrence sur  $N \geq 1$ . Pour  $N = 1$  il s'agit de voir que les fonctions  $G_0, G_1$  et  $G_2$  sont continues au voisinage de l'origine. Ceci résulte immédiatement du fait que la fonction

$$(s-u)^i \cdot \overline{(s-u)}^{2-i} \cdot \theta_j(s-u) \cdot |s-u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s-u|^2)^j$$

est continue en  $(s, u)$  pour  $i = 0, 1, 2$  puisque  $\alpha > -1$ , et de l'intégrabilité de la fonction  $u \mapsto \eta(u) \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k$ .

Supposons l'assertion montrée pour  $N-1 \geq 1$  et montrons-la pour  $N$ .

On a, d'après le théorème de dérivation de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial s}(s) &= (i+\alpha) \cdot \int_{|u| \leq \varepsilon} (s-u)^{i-1} \cdot \overline{(s-u)}^{N-i+1} \cdot \theta_i(s-u) \cdot \eta(u) \cdot R_{\alpha, \beta, j, k}(s, u) \cdot du \wedge d\bar{u} + \\ &\int_{|u| \leq \varepsilon} (s-u)^i \cdot \overline{(s-u)}^{N-i+1} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial s}(s-u) \cdot \eta(u) \cdot R_{\alpha, \beta, j, k}(s, u) \cdot du \wedge d\bar{u} + \\ &j \cdot \int_{|u| \leq \varepsilon} (s-u)^{i-1} \cdot \overline{(s-u)}^{N-i+1} \cdot \theta_i(s-u) \cdot \eta(u) \cdot R_{\alpha, \beta, j-1, k}(s, u) \cdot du \wedge d\bar{u} \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$R_{\alpha, \beta, j, k}(s, u) = |s-u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s-u|^2)^j \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k$$

On constate alors que, comme les fonctions

$$v^{i-1} \cdot \bar{v}^{N-i+1} \cdot \theta_i(v) \quad \text{et} \quad v^i \cdot \bar{v}^{N-i+1} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial s}(v)$$

sont plates à l'ordre  $N-1$  à l'origine, l'hypothèse de récurrence donne que  $\frac{\partial G_i}{\partial s}$  est de classe  $\mathcal{C}^{N-2}$  au voisinage de l'origine. Comme il en est de même pour  $\frac{\partial G_i}{\partial \bar{s}}$ , ceci achève la preuve de notre assertion.

QUATRIÈME ÉTAPE. Etudions maintenant les fonctions suivantes :

$$G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}(s) := \int_{|u| \leq 1} u^p \cdot \bar{u}^q \cdot |s-u|^{2\alpha} \cdot (\text{Log}|s-u|^2)^j \cdot |u|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

où  $j, k, p, q$  sont des entiers et où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels strictement plus grand que  $-1$ . On va établir la proposition suivante :

**Proposition 2.2.2** *La fonction  $G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}$  est de la forme suivante :*

- pour  $p \geq q$  :

$$\sum_{l=0}^L c_l \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot (\text{Log}|s|)^l + s^{p-q} \cdot \Phi(|s|^2)$$

- pour  $p \leq q$  :

$$\sum_{l=0}^L c_l \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot (\text{Log}|s|)^l + \bar{s}^{q-p} \cdot \Phi(|s|^2)$$

où  $\Phi$  est une fonction analytique au voisinage de l'origine qui dépend de  $\alpha, \beta, j, k, p, q$ , où les constantes  $c_l$  dépendent également de  $\alpha, \beta, j, k, p, q$ , et où l'on a

- $L = j + k$  pour  $\alpha + \beta + 1 \notin \mathbb{N}$ ,
- $L = j + k + 1$  pour  $\alpha + \beta + 1 \in \mathbb{N}$  et  $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{N}^2$ ,
- $L = j + k - 1$  pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ .

On notera que ceci implique que la fonction  $G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  en dehors de l'origine et admet, quand  $s \rightarrow 0$  un développement asymptotique avec des termes "singuliers"<sup>3</sup> éventuels bien précis, et que ce développement asymptotique est indéfiniment dérivable, c'est-à-dire que toute dérivée partielle de  $G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}$  admet quand  $s \rightarrow 0$  le développement asymptotique obtenu en effectuant formellement les mêmes dérivées partielles sur le développement asymptotique trouvé que celles effectuées sur  $G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}$ .

PREUVE. Posons  $u = s.t$  pour  $s \neq 0$ . Alors  $G_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}(s) / s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)}$  est donné par l'intégrale :

$$\int_{|t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot |1 - t|^{2\alpha} \cdot |t|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|s \cdot (1 - t)|)^j \cdot (\text{Log}|s \cdot t|)^k \cdot dt \wedge d\bar{t}.$$

Commençons par supposer que  $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{N}^2$ .

Comme l'intégrale pour  $|t| \leq 3$  est un polynôme en  $\text{Log}|s|$  de degré au plus  $j + k$  dont les coefficients dépendent de façon  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(\alpha, \beta) \in ]-1, +\infty[^2$ , nous pouvons nous contenter d'étudier la fonction  $\Gamma_{\alpha, \beta, j, k}^{p, q}(s) / s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)}$  donnée par l'intégrale :

$$\int_{3 \leq |t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot |1 - t|^{2\alpha} \cdot |t|^{2\beta} \cdot (\text{Log}|s \cdot (1 - t)|)^j \cdot (\text{Log}|s \cdot t|)^k \cdot dt \wedge d\bar{t}.$$

---

<sup>3</sup>c'est-à-dire qui ne sont pas dans  $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ .

Ecrivons

$$\begin{aligned} (\text{Log}|s.t|)^k &= (\text{Log}|s| + \text{Log}|t|)^k \quad \text{et} \\ (\text{Log}|s.(1-t)|)^j &= (\text{Log}|s| + \text{Log}|t| + \text{Log}|1-1/t|)^j \end{aligned}$$

et développons par la formule du binôme. On obtient ainsi un polynôme de degré  $\leq j+k$  en  $\text{Log}|s|$  et le coefficient de  $(\text{Log}|s|)^{j+k-h}$  est, à une combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions de la forme

$$\int_{3 \leq |t| \leq 1/|s|} t^p \bar{t}^q |1-t|^{2\alpha} |t|^{2\beta} (\text{Log}|1-1/t|)^{h_1} (\text{Log}|t|)^{h_2} dt \wedge d\bar{t}$$

où  $h_1 + h_2 = h$ .

En coordonnées polaires  $t = \rho.e^{i\varphi}$  l'intégrale donne, à une constante non nulle près,

$$\int_3^{1/|s|} \rho^{p+q+2(\alpha+\beta+1)} (\text{Log}\rho)^{h_2} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \left|1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\rho}\right|^{2\alpha} (\text{Log}\left|1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\rho}\right|)^{h_1} e^{i.(p-q).\varphi} d\varphi.$$

Comme on a  $\rho \geq 3$  on a un développement en série qui est normalement convergent

$$\left|1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\rho}\right|^{2\alpha} (\text{Log}\left|1 - \frac{e^{-i\varphi}}{\rho}\right|)^{h_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\alpha,\nu}^{h_1}(\cos\varphi) \cdot \rho^{-\nu}$$

ce qui donne que  $\Gamma_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}(s)/s^p \bar{s}^q |s|^{2(\alpha+\beta+1)}$  est combinaison linéaire à coefficients constants quand  $h_2$  décrit  $[0, j+k]$  de termes tels que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\alpha,\nu}^{h_1} \int_3^{1/|s|} \rho^{p+q+2(\alpha+\beta+1)-\nu} (\text{Log}\rho)^{h_2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (*)$$

où  $C_{\alpha,\nu}^{h_1} := \int_0^{2\pi} \gamma_{\alpha,\nu}^{h_1}(\cos\varphi) e^{i.(p-q).\varphi} d\varphi$ .

On notera que le polynôme en  $\cos(\varphi)$ ,  $\gamma_{\alpha,\nu}^{h_1}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\alpha \in ]-1, +\infty[$ , et donc que  $C_{\alpha,\nu}^{h_1}$  dépend également de façon  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\alpha \in ]-1, +\infty[$ .

Remarquons maintenant que la fonction

$$H_{\alpha,h_1}^{p,q}(x) = \int_0^{2\pi} |1 - x.e^{-i\varphi}|^{2\alpha} (\text{Log}|1 - x.e^{-i\varphi}|)^{h_1} e^{i.(p-q).\varphi} d\varphi$$

dont le développement en série à l'origine est donné par

$$H_{\alpha,h_1}^{p,q}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\alpha,\nu}^{h_1} x^\nu$$

est  $(-1)^{p+q}$ -paire. Ceci se voit facilement en changeant  $x$  en  $-x$  et  $\varphi$  en  $\varphi + \pi$ . Ceci montre que  $C_{\alpha,\nu}^{h_1}$  est non nul seulement quand les entiers  $p+q$  et  $\nu$  ont même parité.

On en déduit que notre hypothèse  $\alpha + \beta + 1 \notin \mathbb{N}$  montre que l'exposant  $2(\alpha + \beta + 1) + p + q - \nu = 0$  n'apparaît pas dans le développement (\*).

On a donc, pour  $\alpha + \beta + 1 \notin \mathbb{N}$  :

$$G_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}(s) = s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot P_{j,k}(\text{Log}|s|) + \left(\frac{s}{|s|}\right)^p \cdot \left(\frac{\bar{s}}{|s|}\right)^q \cdot \Phi_{j,k}(|s|) \quad (**)$$

où  $P_{j,k}$  est un polynôme de degré  $\leq j+k$ , dont les coefficients dépendent de  $(\alpha, \beta)$  de façon  $\mathcal{C}^\infty$  ainsi que de  $p$  et  $q$ , et où  $\Phi_{j,k}$  (qui dépend également de  $\alpha, \beta, p, q$ ) est analytique au voisinage de l'origine.

On remarquera que le calcul explicite des coefficients du développement en série de la fonction  $\Phi_{j,k}$  montre qu'elle dépend de façon  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(\alpha, \beta) \in (]-1, +\infty[)^2$ ,  $\alpha + \beta + 1 \notin \mathbb{N}$ .

Montrons maintenant par récurrence sur  $j+k$  que la fonction

$$s \mapsto \left(\frac{s}{|s|}\right)^p \cdot \left(\frac{\bar{s}}{|s|}\right)^q \cdot \Phi_{j,k}(|s|)$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  en  $s$  au voisinage de l'origine.

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  on a, en posant  $u = \lambda \cdot v$  dans l'intégrale qui définit la fonction  $G_{\alpha,\beta,0,0}^{p,q}$ , on obtient :

$$G_{\alpha,\beta,0,0}^{p,q}(\lambda \cdot s) = \lambda^p \cdot \bar{\lambda}^q \cdot |\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot \int_{|v| \leq 1/|\lambda|} v^p \cdot \bar{v}^q \cdot |s - v|^{2\alpha} \cdot |v|^{2\beta} \cdot dv \wedge d\bar{v}$$

ce qui donne, puisque la fonction

$$s \mapsto \int_{1 \leq |v| \leq 1/|\lambda|} v^p \cdot \bar{v}^q \cdot |s - v|^{2\alpha} \cdot |v|^{2\beta} \cdot dv \wedge d\bar{v}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $s = 0$ ,

$$G_{\alpha,\beta,0,0}^{p,q}(\lambda \cdot s) - \lambda^p \cdot \bar{\lambda}^q \cdot |\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot G_{\alpha,\beta,0,0}^{p,q}(s) \in \mathcal{C}^\infty.$$

On aura donc, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  fixé,

$$\frac{1}{|\lambda|^{p+q}} \cdot \lambda^p \cdot \bar{\lambda}^q \cdot \left(\frac{s}{|s|}\right)^p \cdot \left(\frac{\bar{s}}{|s|}\right)^q \cdot [\Phi(|\lambda \cdot s|) - |\lambda|^{2(\alpha+\beta+1)+p+q} \cdot \Phi(|s|)] \in \mathbb{C}[[s, \bar{s}]].$$

Comme on a supposé  $(\alpha + \beta + 1) \notin \mathbb{N}$ , et que  $\Phi$  est  $(-1)^{p+q}$ -paire, on a prouvé l'assertion pour  $j+k=0$ .

Supposons l'assertion démontrée pour  $j+k \leq n$  et montrons-là pour  $j+k = n+1$ . Supposons, par exemple  $j \geq 1$ . Alors on a, grâce à l'hypothèse de récurrence

$$G_{\alpha,\beta,j-1,k}^{p,q}(s) - s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot P(\text{Log}|s|) \in \mathcal{C}^\infty.$$

Comme on a

$$\frac{\partial G_{\alpha,\beta,j-1,k}^{p,q}}{\partial \alpha} = G_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}$$

et que la dépendance en  $(\alpha, \beta) \in (]-1, +\infty[)^2$  des calculs précédents est  $\mathcal{C}^\infty$ , on obtient en dérivant en  $\alpha$  la relation (\*\*) pour le couple  $(j-1, k)$

$$G_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}(s) - s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(\alpha+\beta+1)} \cdot [P_{j-1,k}(\text{Log}|s|) \cdot \text{Log}|s|^2 + \frac{\partial P_{j-1,k}}{\partial \alpha}(\text{Log}|s|)] \in \mathcal{C}^\infty$$

ce qui prouve notre assertion pour le couple  $(j, k)$  en vertu de l'unicité du développement asymptotique.

Dans le cas où  $\alpha + \beta + 1 = m \in \mathbb{N}$  la fonction  $\Phi_{0,0}$  sera la somme d'une fonction analytique et d'un terme logarithmique du type  $\delta \cdot |s|^{2m+p+q} \cdot \text{Log}|s|^2$ , qui sera obtenu pour  $\nu = 2m + p + q$ . On peut alors mettre le terme initial  $c \cdot |s|^{2m} \cdot s^p \cdot \bar{s}^q$  dans les termes non singuliers, sortir le terme logarithmique et conclure de façon analogue au cas précédent pour la fonction  $G_{\alpha,\beta,0,0}^{p,q}$ . Le cas où  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$  est arbitraire s'en déduit alors par dérivation  $j$ -fois en  $\alpha$  et  $k$ -fois en  $\beta$ .

Il nous reste à prouver que pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  on a en fait un polynôme en  $\text{Log}|s|$  de degré  $\leq j + k - 1$ . Il suffit en fait de montrer ce résultat pour  $j + k = 1$  car le cas général s'en déduit immédiatement par dérivation en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Il s'agit donc de montrer que pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  et, par exemple<sup>4</sup>  $j = 0, k = 1$  la fonction  $G_{\alpha,\beta,0,1}^{p,q}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Mais ceci est évident pour  $\alpha = 0$ , et le cas  $\alpha \in \mathbb{N}$  s'y ramène en développant le polynôme  $|s - u|^{2\alpha} = (s - u)^\alpha \cdot (\bar{s} - \bar{u})^\alpha$ . ■

CINQUIÈME ET DERNIÈRE ÉTAPE. D'après la seconde étape, on peut se contenter d'intégrer sur le disque  $\{|u| \leq 1\}$  pour prouver l'assertion. Fixons un entier  $N$ . D'après la troisième étape, on peut alors remplacer dans l'intégrale les fonctions  $\theta$  et  $\eta$  par des polynômes de degrés  $N + 1$  pour établir l'existence et la forme du développement asymptotique d'ordre  $N$  puisque l'erreur commise sera de classe  $\mathcal{C}^N$  au voisinage de l'origine.

En développant le polynôme en  $s - u$  on est alors ramené à montrer l'existence d'un développement asymptotique du type désiré pour les fonctions du type

$$s^{p'} \cdot \bar{s}^{q'} \cdot G_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}(s).$$

Ceci est donné par la proposition de l'étape 4.

On remarquera que l'on a prouvé en même temps que les fonctions  $F_{\alpha,\beta,j,k}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  en dehors de l'origine, puisque c'est le cas pour les fonctions  $G_{\alpha,\beta,j,k}^{p,q}$ . Ceci achève la preuve du théorème 2.2.1. ■

<sup>4</sup>rappelons que l'on a symétrie entre  $j$  et  $k$ .

### 2.3 Démonstration du corollaire.

En utilisant de manière anticipée les résultats du chapitre suivant, nous allons démontrer le corollaire 1.0.3. Pour cela nous utiliserons la proposition suivante.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe de fonction holomorphe, et soit  $f : X \rightarrow D$  un représentant de Milnor de  $\tilde{f}$ . Soit  $K \subset X$  un compact et soit  $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(X, \mathbb{C})^{n,n}$  une  $(n, n)$ -forme test telle que la fonction*

$$s \rightarrow \int_{f=s} \varphi$$

*admette le terme  $c \cdot |s|^{2r} \cdot s^m \cdot \bar{s}^{m'} \cdot (\text{Log}|s|)^j$  dans son développement asymptotique en  $s = 0$ , avec  $c \in \mathbb{C}^*$ ,  $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ ,  $j \in [0, n]$  et  $(m, m') \in \mathbb{N}^2$ . Supposons l'entier  $j$  maximal pour  $r, m, m'$  donnés. Alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq p + 1 + (m + m')/2$  il existe  $\varphi_N \in \mathcal{C}_K^\infty(X, \mathbb{C})^{n,n}$  vérifiant*

$$\int_{f=s} \varphi_N = |s|^{2r} \cdot s^{m+p} \cdot \bar{s}^{m'+p} \cdot P_j(\text{Log}|s|) + \mathcal{O}(|s|^{2N}),$$

où  $P_j$  est un polynôme unitaire de degré  $j$ .

PREUVE. Soit donc  $K$  un compact de  $X$  contenant le support de  $\varphi$  et notons

$$\mathcal{M}_K := \left\{ DA \left[ \int_{f=s} \psi \right], \psi \in \mathcal{C}_K^\infty(X, \mathbb{C})^{n,n} \right\}$$

où  $DA(F)$  désigne le développement asymptotique à l'origine de la fonction  $F$ . Alors  $\mathcal{M}_K$  est un  $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ -module de type fini d'après [B. 82], qui est contenu dans

$$|\Xi|_{R,n}^2 := \sum_{(r,j) \in R \times [0,n]} \mathbb{C}[[s, \bar{s}]] \cdot |s|^{2r} \cdot (\text{Log}|s|)^j,$$

où  $R \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1[$  est un sous-ensemble fini.

Notons  $\tilde{\mathcal{M}}_K$  le saturé de  $\mathcal{M}_K$  par les opérateurs  $s \frac{\partial}{\partial s}$  et  $\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}$ . Comme  $|\Xi|_{R,n}^2$  est stable par ces deux opérateurs, la noéthérianité de  $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$  implique que  $\tilde{\mathcal{M}}_K$  est également de type fini sur  $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ .

Mais d'après [B.-S. 74]<sup>5</sup>, on a  $s^{n+1} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{M}_K \subset \mathcal{M}_K$  ainsi que  $\bar{s}^{n+1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \mathcal{M}_K \subset \mathcal{M}_K$ . Ceci montre que l'on a l'inclusion

$$\tilde{\mathcal{M}}_K \subset \mathcal{M}_K[s^{-1}, \bar{s}^{-1}].$$

<sup>5</sup>en combinant l'inclusion  $f^{n+1} \cdot \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$  avec la formule de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{f=s} \varphi = \int_{f=s} \frac{d' \varphi}{df}.$$

La finitude de  $\tilde{\mathcal{M}}_K$  sur  $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$  donne alors l'existence d'un entier  $p$  tel que l'on ait

$$|s|^{2p} \cdot \tilde{\mathcal{M}}_K \subset \mathcal{M}_K.$$

Il nous suffit donc de prouver la proposition pour  $\tilde{\mathcal{M}}_K$  en prenant  $p = 0$  dans ce cas.

Comme  $\tilde{\mathcal{M}}_K$  est stable par  $s \frac{\partial}{\partial s}$  et  $\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}$ , l'utilisation itérée des opérateurs

$$s \frac{\partial}{\partial s} - (r_1 + m_1) \quad \text{et} \quad \bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} - (r_1 + m'_1)$$

permet de supprimer dans le développement asymptotique de  $\varphi$  tous les termes qui ne sont pas des  $\mathcal{O}(|s|^{2N})$  (il n'y en a qu'un nombre fini) et qui ne sont pas de la forme  $|s|^{2r} \cdot s^m \cdot \bar{s}^{m'} \cdot P(\text{Log}|s|)$  où  $P$  est un polynôme de degré égal à  $j$  (rappelons que l'on a supposé que  $j$  est maximal pour  $(r, m, m')$  donné). Ceci permet alors de conclure. ■

**PREUVE DU COROLLAIRE 1.0.3.** La première partie du corollaire est immédiate puisque l'on sait que modulo  $\mathbb{Z}$  les racines du polynôme de Bernstein de  $f$  à l'origine correspondent aux exposants qui apparaissent effectivement dans les développements asymptotiques des intégrales fibres au voisinage de l'origine ; voir par exemple [Bj. 93] chapitre 6.5.

La réciproque est conséquence simple de la proposition précédente, qui permet d'éviter les phénomènes de compensation entre différents termes des développements asymptotiques de  $f$  et  $g$ , et de la non nullité des constantes qui sont calculées dans le chapitre 3 qui suit. ■

**REMARQUE.** La non nullité des constantes et la proposition qui précède la preuve du corollaire ci-dessus permettent d'être précis sur les exposants des logarithmes qui apparaissent pour  $f \oplus g$ . La formulation la plus commode des résultats que l'on peut en déduire consiste à préciser les pôles des transformées de Mellin complexes des intégrales-fibres considérées, c'est à dire de relier les pôles du prolongement méromorphe de  $\int_{X \times Y} |f(x) + g(y)|^{2\lambda} \square$  à ceux de  $\int_X |f|^{2\lambda} \square$  et  $\int_Y |g|^{2\lambda} \square$ . Nous laissons le soin au lecteur de donner les formulations en ces termes de nos résultats.

## 3 Calcul des constantes.

### 3.1 Préliminaires.

**NOTATIONS.** Pour  $a, b, \dots$  des nombres complexes, nous noterons  $\alpha, \beta, \dots$  leurs parties réelles respectives.

Nous poserons, pour  $|x| < 1, m \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $\alpha > -1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - x.e^{-i\theta}|^{2a} . e^{im\theta} . d\theta = \sum_{r=0}^{+\infty} \gamma_{a,m}^r . x^r. \quad (\textcircled{a})$$

On remarquera que  $\gamma_{a,m}^r = 0$  si  $r \neq m$  modulo 2, puisque l'intégrale considérée est invariante par le changement  $x \rightarrow -x$  et  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ .

La conjugaison complexe montre que l'on a

$$\overline{\gamma_{a,-m}^r} = \gamma_{a,m}^r$$

il nous suffira donc de considérer le cas où  $m$  est dans  $\mathbb{N}$ .

On remarquera également que les coefficients  $\gamma_{a,m}^r$  dépendent holomorphiquement de  $a$  sur l'ouvert  $\alpha > -1$ , d'après la formule de Cauchy.

**Lemme 3.1.1** *La fonction holomorphe définie sur l'ouvert  $U_q^0$  de  $\mathbb{C}^2$  défini par les inégalités  $\alpha > -1, \beta + q/2 > -1, \alpha + \beta + q/2 < -1$  en posant*

$$G_q(a, b) := \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} |1 - t|^{2a} . t^q . |t|^{2b} . dt \wedge d\bar{t}$$

est égale à

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+q+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)\Gamma(a+b+q+2)}. \quad (*)$$

PREUVE. Commençons par remarquer que la convergence absolue de l'intégrale définissant  $G_q$  est assurée en  $t = 0$  par la condition  $2\beta + q + 1 > -1$ , en  $t = 1$  par la condition  $\alpha > -1$  et en  $|t| = +\infty$  par la condition  $2(\alpha + \beta) + q + 1 < -1$ . Donc la fonction  $G_q$  est bien holomorphe sur l'ouvert  $U_q^0$ .

Pour prouver la formule (\*) il suffit de le faire quand  $a = \alpha$  et  $b = \beta$ . Ce que nous supposons donc dans la suite.

En coordonnées polaires  $t = \rho . e^{i\theta}$  on aura, pour  $(\alpha, \beta) \in U_q^0$  :

$$G_q(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} (1 + \rho^2)^\alpha . \rho^{2(\beta+q/2+1)} . \frac{d\rho}{\rho} . \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2\rho \cdot \cos \theta}{1 + \rho^2}\right)^\alpha . e^{iq\theta} . d\theta \right) \quad (**)$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2\rho \cdot \cos \theta}{1 + \rho^2}\right)^\alpha . e^{iq\theta} . d\theta = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1) \cdot k!} \cdot \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot \rho^k}{(1 + \rho^2)^k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k \theta . e^{iq\theta} . d\theta. \end{aligned}$$

Et, comme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k \theta . e^{iq\theta} . d\theta &= \frac{1}{2^k} \cdot C_k^j \quad \text{si } k = q + 2j, \text{ avec } j \in [0, k], \text{ et} \\ &= 0 \quad \text{sinon, on obtient} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2\rho \cos \theta}{1 + \rho^2}\right)^\alpha \cdot e^{iq\theta} \cdot d\theta =$$

$$(-1)^q \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} C_{q+2j}^j \times \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - q - 2j + 1) \cdot (q + 2j)!} \times \frac{\rho^{q+2j}}{(1 + \rho^2)^{q+2j}}.$$

En reportant dans (\*\*) cela donne

$$G_q(\alpha, \beta) =$$

$$(-1)^q \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} C_{q+2j}^j \times \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - q - 2j + 1) \cdot (q + 2j)!} \times \int_0^{+\infty} (1 + \rho^2)^{\alpha - q - 2j} \cdot \rho^{2(\beta + q + j + 1)} \cdot \frac{d\rho}{\rho}.$$

Utilisons alors la formule classique

$$\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^{-u} \cdot x^v \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2}) \cdot \Gamma(u - \frac{v+1}{2})}{\Gamma(u)}$$

avec  $u = q + 2j - \alpha$  et  $1 + v = 2(\beta + q + j + 1)$ . On obtient

$$G_q(\alpha, \beta) = \frac{(-1)^q}{2} \cdot \Gamma(\alpha + 1) \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + q + j + 1) \cdot \Gamma(-\alpha - \beta + j - 1) \cdot (q + 2j)!}{\Gamma(\alpha - q - 2j + 1) \cdot [(q + 2j)!] \Gamma(q + 2j - \alpha) \cdot j! \cdot (q + j)!}.$$

Après simplification par  $(q + 2j)!$  et utilisation de la formule des compléments qui donne

$$\Gamma(\alpha - q - 2j + 1) \cdot \Gamma(q + 2j - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi(q + 2j - \alpha)}$$

$$= (-1)^{q+1} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} = (-1)^q \cdot \Gamma(1 + \alpha) \cdot \Gamma(-\alpha)$$

on arrive à

$$G_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(-\alpha)} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + q + j + 1) \cdot \Gamma(-\alpha - \beta + j - 1)}{\Gamma(q + j + 1) \cdot j!}$$

Utilisons maintenant la formule (voir Erdelyi, Magnus ... p. 10)

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(j + x) \cdot \Gamma(j + y)}{\Gamma(j + z) \cdot j!} = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y) \cdot \Gamma(z - x - y)}{\Gamma(z - x) \cdot \Gamma(z - y)}.$$

On obtient avec  $x = \beta + q + 1$ ,  $y = -\alpha - \beta - 1$  et  $z = q + 1$

$$G_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\beta + q + 1) \cdot \Gamma(-\alpha - \beta - 1) \cdot \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(-\beta) \cdot \Gamma(\alpha + \beta + q + 2)}$$

c'est à dire la formule annoncée. ■

## REMARQUES.

- 1) Le changement  $t \rightarrow 1/t$  transforme  $G_q(\alpha, \beta)$  en  $\overline{G_q(\alpha, -(\alpha + \beta + q + 2))}$ .  
On constate que ceci est bien compatible avec la formule obtenue puisque si  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = -(\alpha + \beta + q + 2)$  on a

$$\begin{aligned}\beta' + q + 1 &= -\alpha - \beta - 1, & -\alpha' - \beta' - 1 &= \beta + q + 1, \\ \alpha' + \beta' + q + 2 &= -\beta & \text{etc...}\end{aligned}$$

- 2) On notera également que l'ouvert  $U_q^0$  est stable par cette involution, puisque

$$\begin{aligned}\beta' + q/2 + 1 &= -\alpha - \beta - q/2 - 1 > 0 & \text{ainsi que} \\ \alpha' + \beta' + q/2 + 1 &= -\beta - q/2 - 1 < 0\end{aligned}$$

pour  $(\alpha, \beta) \in U_q^0$ .

- 3) On remarquera que pour  $(\alpha, \beta) \in U_q^0 \cap \mathbb{R}^2$  le nombre  $G_q(\alpha, \beta)$  est réel. On en déduit que l'on a, pour tout  $(\alpha, \beta) \in U_q^0 \cap \mathbb{R}^2$

$$G_{\bar{q}}(\alpha, \beta) := \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} |1 - t|^{2\alpha} \cdot \bar{t}^q \cdot |t|^{2\beta} \cdot dt \wedge d\bar{t} = G_q(\alpha, \beta).$$

On a donc, pour  $(a, b) \in U_q^0$  l'égalité  $G_{\bar{q}}(a, b) = \overline{G_q(\bar{a}, \bar{b})}$ .  $\square$

Considérons maintenant la même intégrale que dans le lemme précédent mais en demandant seulement à  $(a, b)$  de vérifier les conditions de convergence en  $t = 0$  et  $t = 1$  c'est à dire d'être dans l'ouvert  $U_q$  défini par les inégalités  $\alpha > -1$  et  $\beta + q/2 > -1$ . L'intégrale diverge alors à l'infini, mais le lemme suivant montre que sa "partie finie", c'est à dire le terme constant dans le développement asymptotique à l'infini de cette intégrale donne le prolongement méromorphe de la fonction  $G_q$  à l'ouvert  $U_q$ .

**Lemme 3.1.2** *Soit  $q$  un entiers positif ou nul. Pour  $(a, b) \in U_q$  tels que  $a + b + 1$  soit pas dans  $\mathbb{N}$ , on a, pour  $N$  entier assez grand*

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 3} |1 - t|^{2a} \cdot t^q \cdot |t|^{2b} \cdot dt \wedge d\bar{t} + \right. \\ \left. \int_3^{1/|s|} \rho^{2(a+b+1)+q} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \right|^{2a} \cdot e^{i \cdot q \cdot \theta} \cdot d\theta - \sum_0^N \gamma_{a,q}^r \cdot \rho^{-r} \right] + \right. \\ \left. - \sum_{r=0}^N \frac{\gamma_{a,q}^r}{2(a+b+1)+q-r} \cdot 3^{2(a+b+1)+q-r} = \right. \\ \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+q+1) \cdot \Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b) \cdot \Gamma(a+b+q+2)} \right] \quad (***)\end{aligned}$$

PREUVE. Remarquons déjà que pour  $N$  fixé la différence

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \right|^{2a} \cdot e^{iq\theta} \cdot d\theta - \sum_0^N \gamma_{a,q}^r \cdot \rho^{-r} \right]$$

est un  $O(\rho^{-N-1})$  et donc que pour  $2(\alpha + \beta + 1) + q - N - 1 < 0$  l'intégrale de 3 à  $+\infty$  converge et la limite cherchée est simplement la valeur de cette intégrale.

Il s'agit donc simplement de montrer que le prolongement analytique de la fonction holomorphe  $G_q$  définie sur l'ouvert  $U_q^0$  est bien donné par cette intégrale. On conclura alors grâce au lemme précédent.

Mais pour  $(a, b) \in U_q^0$ , en coupant l'intégrale définissant  $G_q$  pour  $|t| \leq 3$  et pour  $|t| \geq 3$  et en utilisant le développement (©) à l'ordre  $N$  dans cette dernière, on obtient bien l'égalité de la limite du membre de gauche de (\*\*\*) avec  $G_q$  sur l'ouvert  $U_q^0$ , puisque  $|s|^{-[2(a+b+1)+q-r]}$  tend vers 0 quand  $s \rightarrow 0$ , étant donné que l'on a  $\alpha + \beta + q/2 + 1 < 0$  et  $r \geq 0$ . ■

On remarquera que ceci montre que le prolongement analytique de la fonction  $G_q$  a des pôles simples (au plus) sur les droites

$$a + b + 1 = \frac{r - q}{2} \quad \text{pour } r \in \mathbb{N}, \quad r = q \text{ modulo } 2.$$

Le fait que ces points soient réellement des pôles simples quand  $a + b + 1 \in \mathbb{N}$  est montré à posteriori par la formule que l'on a établie. Ceci permet de calculer les coefficients  $\gamma_{a,q}^r$ . On obtient pour  $a \notin \mathbb{N}$  en utilisant la formule des compléments (on notera que  $a \notin -\mathbb{N}$  sous nos hypothèses, puisque l'on a  $\alpha > -1$  et aussi que  $\frac{r+q}{2} - a \notin \mathbb{N}$ , puisque  $\frac{r+q}{2} - \alpha = \beta + q + 1 > 0$ )

$$\begin{aligned} \gamma_{a,q}^r &= \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(\frac{r+q}{2} - a) \cdot (-1)^{\frac{r-q}{2}}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(a+1 - \frac{r-q}{2}) \cdot \Gamma(\frac{r+q}{2} + 1) \cdot (\frac{r-q}{2})!} \\ &= (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(a+1)^2}{\Gamma(a+1 - \frac{r-q}{2}) \cdot \Gamma(a+1 - \frac{r+q}{2}) \cdot (\frac{r-q}{2})! \cdot (\frac{r+q}{2})!}. \end{aligned} \quad (\text{@@})$$

Pour  $a \in \mathbb{N}$  le calcul direct donne, pour  $q \leq r \leq r+q \leq 2a$

$$\gamma_{a,q}^r = (-1)^r \cdot C_a^{(r+q)/2} \cdot C_a^{(r-q)/2},$$

et 0 sinon, ce qui coïncide bien avec (@@).

La situation précédente où  $a + b + 1 \in \mathbb{N}$  avec  $a$  non entier est examinée dans le lemme suivant.

**Lemme 3.1.3** Soit  $q$  un entiers positif ou nul. Pour  $(a, b) \in U_q, a + b + 1 \in \mathbb{N}$ ,  $a$  non entier, posons  $r_0 = 2(a + b + 1) + q$ . Alors on a, pour  $N \geq r_0$  entier

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 3} |1 - t|^{2a} \cdot t^q \cdot |t|^{2b} \cdot dt \wedge d\bar{t} + \right. \\ & \quad \left. \int_3^{1/|s|} \rho^{2(a+b+1)+q+j} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \right|^{2a} \cdot e^{iq\theta} \cdot d\theta - \sum_0^N \gamma_{a,q}^r \cdot \rho^{-r} \right] \right] + \\ & \quad - \sum_{r=0, r \neq r_0}^N \frac{\gamma_{a,q}^r}{2(a+b+1)+q-r} \cdot 3^{2(a+b+1)+q-r} + \gamma_{a,q}^{r_0} \cdot \text{Log } 3 \end{aligned}$$

est égale à

$$\frac{(-1)^{r_0}}{2} \frac{[\Gamma'(1) + \sum_{j=1}^{(r_0-q)/2} \frac{1}{j}] \cdot \Gamma(a+1)^2}{\Gamma((a+1 - \frac{r_0+q}{2})) \cdot \Gamma((a+1 - \frac{r_0-q}{2})) \cdot (\frac{r_0+q}{2}!) \cdot (\frac{r_0-q}{2}!)}$$

PREUVE. La preuve est la même que pour le lemme précédent sauf que le terme pour  $r = r_0$  donne un terme logarithmique dans ce cas. On doit donc évaluer la valeur en  $2(a + b + 1) + q = r_0$  de la somme

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+q+1) \cdot \Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b) \cdot \Gamma(a+b+q+2)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma_{a,q}^{r_0}}{a+b+1 + (q-r_0)/2}$$

Compte tenu de la formule (@@), du fait que l'on a, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma(z - k) = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left[ \frac{1}{z} + \Gamma'(1) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + o(z) \right]$$

quand  $z \rightarrow 0$ , un calcul simple montre que la valeur de cette limite est bien celle annoncée.  $\blacksquare$

On notera que cette limite n'est jamais nulle puisque l'on suppose que  $a$  n'est pas un entier

NOTATION. Notons pour  $p, q$  entiers positifs,

$$U_{p,q} := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 / \alpha + p/2 > -1 \text{ et } \beta + q/2 > -1\}$$

$$U_{p,q}^0 := U_{p,q} \cap \left\{ \alpha + \beta + 1 + \frac{p+q}{2} < 0 \right\}$$

$$V_{p,q} = U_{p,q} \setminus \{a + b + 1 \in \mathbb{Z}\}.$$

On remarquera que pour  $(a, b) \in U_{p,q}^0$ , on a  $a + b + 1 \notin \mathbb{N}$  puisque les inégalités imposées impliquent  $-1 - \frac{p+q}{2} < \alpha + \beta + 1 < -\frac{p+q}{2}$ .

**Lemme 3.1.4** Soient  $0 \leq p \leq q$  deux entiers. Posons pour  $(a, b) \in U_{p,q}^0$

$$F_{p,q}(a, b) := \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2a} \cdot (1-t)^p \cdot |t|^{2b} \cdot t^q \cdot dt \wedge d\bar{t}$$

$$F_{p,\bar{q}}(a, b) := \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} |1-t|^{2a} \cdot (1-t)^p \cdot |t|^{2b} \cdot \bar{t}^q \cdot dt \wedge d\bar{t}$$

On a alors

$$F_{p,q}(a, b) = \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1) \cdot \Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(a+b+p+q+2) \cdot \Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)}$$

$$F_{p,\bar{q}}(a, b) = (-1)^p \cdot \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1) \cdot \Gamma(-a-b-p-1)}{\Gamma(a+b+q+2) \cdot \Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)}.$$

REMARQUES.

i) On vérifie facilement que les égalités "évidentes à priori" sur  $U_{p,q}^0 \cap \mathbb{R}^2$

$$F_{p,0} = F_{p,\bar{0}} \quad \text{et} \quad F_{0,q} = F_{0,\bar{q}}.$$

ii) Une conséquence simple du lemme précédent est le prolongement méromorphe des fonctions  $F_{p,q}$  et  $F_{p,\bar{q}}$  à l'ouvert  $U_{p,q}$  avec des pôles au plus simples sur les droites  $a+b+1 \in \mathbb{N}$ .

PREUVE. La formule suivante sera la clef de cette preuve.

**Lemme 3.1.5** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $x, y$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$  on a

$$A_p(x, y) := \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x+y+j)} = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p) \cdot \Gamma(y)}.$$

PREUVE. Montrons cette égalité par récurrence sur  $p \geq 0$ . Le cas  $p = 0$  est trivial. Supposons la formule démontrée pour  $p$  et montrons-là pour  $p+1$ . En utilisant l'égalité  $C_{p+1}^j = C_p^j + C_p^{j-1}$  on obtient

$$\begin{aligned} A_{p+1}(x, y) &= A_p(x, y) - A_p(x+1, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p) \cdot \Gamma(y)} - \frac{\Gamma(x+1) \cdot \Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p+1) \cdot \Gamma(y)} \\ &= \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y+p)}{\Gamma(x+y+p+1) \cdot \Gamma(y)} [x+y+p-x] \\ &= \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y+p+1)}{\Gamma(x+y+p+1) \cdot \Gamma(y)} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

PREUVE DU LEMME 3.1.5. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot G_{q+j}(a,b) \\ &= \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)} \times \left( \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{\Gamma(b+q+j+1)}{\Gamma(a+b+q+j+2)} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme ci-dessus avec  $x = b+q+1, y = a+1$  on obtient la formule annoncée.

La formule du binôme donne

$$\begin{aligned} F_{p,\bar{q}}(a,b) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot G_{q-j}(a,b+j) \\ &= \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(a+b+q+2)} \times \left( \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{\Gamma(-a-b-j-1)}{\Gamma(-b-j)} \right) \end{aligned}$$

La formule des compléments donne alors la formule annoncée. ■

REMARQUE. Pour  $a+b+1 \notin \mathbb{N}$ , les nombres complexes  $F_{p,q}(a,b)$  et  $F_{p,\bar{q}}(a,b)$  sont non nuls. □

### 3.2 Le premier cas.

NOTATION. Soient  $0 \leq p \leq$  deux entiers et soit  $D$  le disque unité du plan complexe. Pour  $(a,b) \in U_{p,q}$  et  $s \in D^* := D \setminus \{0\}$  posons

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot |u|^{2b} \cdot u^q \cdot du \wedge d\bar{u} \\ F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot |u|^{2b} \cdot \bar{u}^q \cdot du \wedge d\bar{u} \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.1 (Le premier cas :  $a+b+1$  n'est pas dans  $\mathbb{N}$ .)** *On suppose que  $(a,b) \in V_{p,q}$ . Alors il existe des fonctions  $\Phi_{p,q}$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}$  qui sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $V_{p,q} \times D$ , holomorphes sur  $V_{p,q}$  pour  $s \in D$  fixé, telles que l'on ait sur  $V_{p,q} \times D^*$*

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b)[s] &= F_{p,q}(a,b) \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q} \cdot \Phi_{p,q}(a,b,s) \\ F_{p,\bar{q}}(a,b)[s] &= F_{p,\bar{q}}(a,b) \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p} \cdot \Phi_{p,\bar{q}}(a,b,s) \end{aligned}$$

PREUVE. Remarquons déjà que le fait que ces fonctions soient  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert  $U_{p,q}^0 \times D^*$ , holomorphes sur  $U_{p,q}^0$  pour  $s \in D^*$  fixé, est conséquence immédiate

des définitions. Nous allons commencer par traiter le cas de  $F_{p,q}$ . Pour  $s \in D^*$  effectuons le changement de variable  $u = s.t$ . On obtient

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a,b)[s] &= s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1/|s|} |1-t|^{2a} \cdot (1-t)^p \cdot |t|^{2b} \cdot t^q \cdot dt \wedge d\bar{t} \\ &= s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1/|s|} |1-t|^{2a} \cdot t^{q+j} \cdot |t|^{2b} \cdot dt \wedge d\bar{t}. \end{aligned}$$

Supposons  $|s| < 1/3$  et posons

$$C_{p,q}^0(a,b) := \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 3} |1-t|^{2a} \cdot (1-t)^p \cdot |t|^{2b} \cdot t^q \cdot dt \wedge d\bar{t}.$$

L'intégrale pour  $3 \leq |t| \leq 1/|s|$  correspondant au terme  $j \in [0, p]$  donne en coordonnées polaires

$$I_j = \int_3^{1/|s|} \rho^{2(a+b+q+j+1)} \cdot d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|1 - \frac{e^{-i\theta}}{\rho}\right|^{2a} \cdot e^{i(q+j)\theta} \cdot d\theta. \quad (\text{A})$$

Utilisons le développement  $(\text{\textcircled{A}})$ , en se souvenant que l'on a  $r = q + j$  modulo 2 :

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_{r=0}^{+\infty} \gamma_{a,q+j}^r \cdot \int_0^{1/|s|} \rho^{2(a+b+(q+j-r)/2)+1} \cdot d\rho \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\gamma_{a,q+j}^r}{2(a+b+(q+j-r)/2)+1} \cdot \left[ |s|^{-2(a+b+(q+j-r)/2)+1} - 3^{-2(a+b+(q+j-r)/2)+1} \right] \\ &= C_{j,q}^1(a,b) + |s|^{-2(a+b+1)} \cdot \Psi_j(a,b,|s|^2). \end{aligned} \quad (\text{B})$$

la fonction  $\Psi_j$  étant une série de Laurent en  $|s|^2$  dont les coefficients sont holomorphes en  $(a,b)$  pourvu que  $a+b \notin \mathbb{Z}$ . On notera que la puissance maximale négative en  $|s|^2$  dans  $\Psi_j$  est  $(j+q)/2 \leq (p+q)/2$ .

On obtient alors

$$F_{p,q}(a,b)[s] = C_{p,q}(a,b) \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot s^{p+q} \cdot \Psi_j(a,b,|s|^2)$$

où nous avons posé

$$C_{p,q}(a,b) = C_{p,q}^0(a,b) + \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot C_{j,q}^1(a,b).$$

Ceci établit l'assertion annoncée pour la fonction  $F_{p,q}$  sauf qu'il nous reste à montrer les deux points suivants :

1. La fonction  $\Phi_{p,q}(a,b,s) := \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot s^{p+q} \cdot \Psi_j(a,b,|s|^2)$  est bien  $\mathcal{C}^\infty$  en  $s = 0$ , c'est à dire ne présente pas de termes non nul de la forme  $s^{p+q}/|s|^{2k}$  avec  $k \geq 1$ .

2. Montrer que la constante  $C_{p,q}(a, b)$  est bien égale à  $F_{p,q}(a, b)$ .

Pour établir le premier point considérons un nombre complexe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et calculons la différence  $F_{p,q}(a, b)[\lambda.s] - \lambda^{p+q} \cdot |\lambda|^{2(a+b+1)} \cdot F_{p,q}(a, b)[s]$ . Le changement de variable  $v = \lambda.u$  montre que cette différence est donnée, pour  $|\lambda| < 1$  par l'intégrale

$$\frac{i}{4\pi} \int_{1 \leq |v| \leq 1/|\lambda|} |s-v|^{2a} \cdot (s-v)^p \cdot |v|^{2b} \cdot v^q \cdot dv \wedge d\bar{v}.$$

Cette différence est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{C}^2 \times D$ , holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  à  $s \in D$  fixé. Mais la présence d'un terme non nul de la forme  $c.s^{p+q}/|s|^{2k}$  avec  $k \geq 1$  produirait dans le développement à l'origine de la différence précédente le terme

$$c \cdot \left[ \lambda^{p+q} \cdot (|\lambda|^{-2k} - |\lambda|^{2(a+b+1)}) \right] \cdot s^{p+q}/|s|^{2k}$$

nécessairement non nul puisque  $\alpha + \beta + 1 > -1$ , ce qui contredirait l'aspect  $\mathcal{C}^\infty$  en  $s = 0$  de cette différence.

L'identification de la constante s'obtient facilement en utilisant les lemmes 3.1.2 et 3.1.4.

La preuve pour la fonction  $F_{p,\bar{q}}$  est tout à fait analogue.

On notera que le terme  $s^p \cdot \bar{s}^q / |s|^{2k}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  pour  $k \in [0, p]$ , puisque l'on a supposé  $0 \leq p \leq q$ , ce qui explique le facteur  $\bar{s}^{q-p}$  dans ce cas.  $\blacksquare$

REMARQUE. Pour  $a$  ou  $b$  dans  $\mathbb{N}$  on a  $F_{p,q}(a, b) = 0$  ainsi que  $F_{p,\bar{q}}(a, b) = 0$  ce qui montre que la fonction considérée est  $\mathcal{C}^\infty$  en  $s = 0$ . Ceci est évident a priori puisque l'on convole une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  avec une fonction localement intégrable à support compact.

**Corollaire 3.2.2** *Dans la situation de la proposition précédente, soient  $j$  et  $k$  deux entiers, et définissons pour  $(a, b) \in V_{p,q}$  les fonctions*

$$F_{p,q}^{j,k}(a, b)[s] := \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot u^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

$$F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[s] := \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot \bar{u}^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

Alors on a

$$F_{p,q}^{j,k}(a, b)[s] = P_{p,q}^{j,k}(a, b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q} \cdot \Phi_{p,q}(a, b, s)$$

$$F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[s] = P_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p} \cdot \Phi_{p,\bar{q}}(a, b, s)$$

où  $P_{p,q}^{j,k}$  et  $P_{p,\bar{q}}^{j,k}$  sont des polynômes de degré  $j+k$  dont les coefficients dépendent holomorphiquement de  $(a, b)$  et dont les coefficients dominants sont donnés par  $F_{p,q}(a, b)$  et  $F_{p,\bar{q}}(a, b)$  respectivement, et où les fonctions  $\Phi_{p,q}^{j,k}$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}^{j,k}$  sont obtenues via l'opération  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$  sur les fonctions  $\Phi_{p,q}$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}$  de la proposition précédente.

PREUVE. Il suffit d'appliquer l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$  dans l'assertion de la proposition précédente. ■

COMPLÉMENT. Dans le cas où  $a$  (ou bien  $b$ ) est dans  $\mathbb{N}$ , avec  $(a, b) \in U_{p,q}$ , le terme de degré  $k + j$ , c'est à dire le coefficient de  $s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot [\text{Log}|s|^2]^{j+k}$  (resp. de  $s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot [\text{Log}|s|^2]^{j+k}$ ) est nul. Pour avoir le terme singulier dominant non nul on doit donc calculer le coefficient de  $s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot [\text{Log}|s|^2]^{j+k-1}$  (resp.  $s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot [\text{Log}|s|^2]^{j+k-1}$ ). Un calcul simple donne que ce coefficient vaut

$$\left[ \frac{\partial F_{p,q}}{\partial a} + \frac{\partial F_{p,q}}{\partial b} \right](a, b) \quad (\text{resp.} \quad \left[ \frac{\partial F_{p,\bar{q}}}{\partial a} + \frac{\partial F_{p,\bar{q}}}{\partial b} \right](a, b)).$$

Comme on a  $\Gamma(z - k) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z} + \text{holomorphe}(z)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $z$  voisin de 0, on constate que pour obtenir le coefficient cherché il suffit de remplacer (si par exemple c'est  $a$  qui est dans  $\mathbb{N}$ ) le facteur  $1/\Gamma(-a)$  dans l'expression de  $F_{p,q}$  par le nombre  $(-1)^{a+1} \cdot a!$  (resp. dans l'expression de  $F_{p,\bar{q}}$ ). Ceci montre que ces coefficients sont non nuls (car  $a$  et  $b$  ne peuvent être simultanément dans  $\mathbb{N}$  puisque  $a + b + 1 \notin \mathbb{N}$  par hypothèse).

Donc dans ces cas les polynômes en  $\text{Log}|s|^2$   $P_{p,q}^{j,k}(a, b)$  et  $P_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)$  sont de degré exactement  $j + k - 1$ . □

### 3.3 Le second cas.

**Proposition 3.3.1 (Le second cas :  $a, b$  non entiers et  $a + b + 1 \in \mathbb{N}$ .)** *On suppose maintenant que  $(a, b) \in U_{p,q}$  mais que  $a + b + 1$  est un entier. Alors on a*

$$\begin{aligned} F_{p,q}(a, b)[s] &= [\tilde{F}_{p,q}(a, b) \cdot \text{Log}|s|^2 + c_{p,q}(a, b)] \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q} \cdot \Psi_{p,q}(a, b, s) \\ F_{p,\bar{q}}(a, b)[s] &= [\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b) \cdot \text{Log}|s|^2 + c_{p,\bar{q}}(a, b)] \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p} \cdot \Psi_{p,\bar{q}}(a, b, s) \end{aligned}$$

où les coefficients  $\tilde{F}_{p,q}(a, b)$  et  $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b)$  sont donnés par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{p,q}(a, b) &= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)} \cdot \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+2) \cdot \Gamma(a+b+p+q+2)} \\ \tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b) &= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)} \cdot \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2) \cdot \Gamma(a+b+p+2)} \end{aligned}$$

où les fonctions  $\Psi_{p,q}$  et  $\Psi_{p,\bar{q}}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U_{p,q} \times D$ , holomorphes sur  $U_{p,q}$  pour  $s \in D$  fixé, et les fonctions  $c_{p,q}$  et  $c_{p,\bar{q}}$  sont holomorphes sur  $U_{p,q}$ .

REMARQUE. Quand on suppose de plus que  $a$  et  $b$  ne sont pas entiers, les nombres  $\tilde{F}_{p,q}(a, b)$  et  $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b)$  ne sont pas nuls. □

PREUVE. Elle est analogue au cas de la proposition 3.2.1 sauf qu'il faut prendre en compte l'apparition du logarithme puisque le fait que  $a + b + 1$  soit entier oblige à rencontrer dans la somme l'intégrale  $\int_3^{1/|s|} \frac{d\rho}{\rho}$ . Posons  $r_j = q + j + 2(a + b + 1)$ , et reprenons le calcul de l'intégrale  $I_j$  (voir (A) dans la preuve de la proposition 3.2.1). Le terme en  $s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot \text{Log}|s|$  aura pour coefficient  $-\gamma_{a,q+j}^{r_j}$ . On obtiendra ainsi que

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{p,q}(a, b) &= - \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \gamma_{a,q+j}^{r_j} \\ &= (-1)^{a+b} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b) \cdot \Gamma(a+b+2)} \cdot \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{\Gamma(b+q+j+1)}{\Gamma(a+b+q+j+2)} \\ &= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)} \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+2) \cdot \Gamma(a+b+p+q+2)} \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1.5.

Le calcul analogue pour le coefficient  $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b)$  donne,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{p,\bar{q}}(a, b) &= - \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \gamma_{a,j-q}^{r_j} \\ &= (-1)^{a+b+q} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b-q) \cdot \Gamma(a+b+q+2)} \cdot \sum_{j=0}^p (-1)^j \cdot C_p^j \cdot \frac{\Gamma(b+j+1)}{\Gamma(a+b+j+2)} \\ &= \frac{(-1)^{a+b+q}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b-q)} \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+q+2) \cdot \Gamma(a+b+p+2)} \\ &= \frac{(-1)^{a+b}}{\Gamma(-a) \cdot \Gamma(-b)} \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2) \cdot \Gamma(a+b+p+2)} \end{aligned}$$

d'après la formule des compléments. ■

**Corollaire 3.3.2** *Dans la situation de la proposition précédente, soient  $j$  et  $k$  deux entiers, et définissons pour  $(a, b) \in U_{p,q}$  vérifiant  $a + b + 1 \in \mathbb{N}$ , les fonctions*

$$\begin{aligned} F_{p,q}^{j,k}(a, b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot u^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u} \\ F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[s] &:= \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot \bar{u}^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u} \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F_{p,q}^{j,k}(a, b)[s] &= P_{p,q}^{j,k}(a, b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q} \cdot \Phi_{p,q}(a, b, s) \\ F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[s] &= P_{p,\bar{q}}^{j,k}(a, b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p} \cdot \Phi_{p,\bar{q}}(a, b, s) \end{aligned}$$

où  $P_{p,q}^{j,k}$  et  $P_{p,\bar{q}}^{j,k}$  sont des polynômes de degré  $j+k+1$  dont les coefficients dépendent holomorphiquement de  $(a,b)$  et dont les coefficients dominants sont donnés par  $\tilde{F}_{p,q}(a,b)$  et  $\tilde{F}_{p,\bar{q}}(a,b)$  respectivement, et où les fonctions  $\Phi_{p,q}^{j,k}$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}^{j,k}$  sont obtenues via l'opération  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$  sur les fonctions  $\Phi_{p,q}$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}$  de la proposition précédente.

PREUVE. Il suffit à nouveau d'appliquer l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial^j a \partial^k b}$  dans l'assertion de la proposition précédente.  $\blacksquare$

Le dernier cas à traiter est celui où  $a$  et  $b$  sont entiers. Ceci ne peut s'obtenir comme précédemment par dérivation du cas où les logarithmes n'apparaissent pas. Il faut donc traiter directement l'analogie des corollaires 3.2.2 et 3.3.2.

### 3.4 Le dernier cas.

**Proposition 3.4.1 (Le cas  $a$  et  $b$  entiers.)** *Donnons-nous deux entiers  $0 \leq p \leq q$ . Supposons maintenant que  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et que l'on a  $a+p/2 > -1$  et  $b+q/2 > -1$ . Pour  $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $s \in D^*$  posons alors*

$$F_{p,q}^{j,k}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot u^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

$$F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[s] := \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot (\text{Log}|s-u|)^j \cdot |u|^{2b} \cdot \bar{u}^q \cdot (\text{Log}|u|^2)^k \cdot du \wedge d\bar{u}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} F_{p,q}^{j,k}(a,b)[s] &= \check{P}_{p,q}^{j,k}(a,b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} + s^{p+q} \cdot \Phi_{p,q}(a,b)[|s|^2] \\ F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[s] &= \check{P}_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[\text{Log}|s|^2] \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot |s|^{2(a+b+1)} + \bar{s}^{q-p} \cdot \Phi_{p,\bar{q}}(a,b)[|s|^2] \end{aligned} \quad (\text{C})$$

où  $\check{P}_{p,q}^{j,k}$  et  $\check{P}_{p,\bar{q}}^{j,k}$  sont des polynômes de degré exactement  $j+k-1$  et où les fonctions  $\Phi_{p,q}^{j,k}(a,b)$  et  $\Phi_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)$  sont analytiques réelles.

PREUVE. Le changement de variable  $u = t.s$ , pour  $s \neq 0$  fixé donne

$$F_{p,q}^{j,k}(a,b)[s] = s^{p+q} \cdot |s|^{2(a+b+1)} \cdot I(s) \quad \text{avec} \quad I(s) := \int_{|t| \leq 1/|s|} |1-t|^{2a} \cdot (1-t)^p \cdot (\text{Log}|1-t|^2 + \text{Log}|s|^2)^j \cdot |t|^{2b} \cdot t^q \cdot (\text{Log}|t|^2 + \text{Log}|s|^2)^k \cdot dt \wedge d\bar{t}$$

ainsi qu'une expression analogue pour  $F_{p,\bar{q}}^{j,k}(a,b)[s]$ . Des calculs analogues à ceux déjà détaillés plus haut montrent facilement que l'on a des expressions du type (C), mais avec des polynômes en  $\text{Log}|s|^2$  à priori de degrés inférieurs ou égaux à  $k+j+1$ . Nous allons démontrer l'assertion sur le degré de ces polynômes par récurrence sur  $j+k = n \geq 2$ . Commençons par remarquer que pour  $n = 1$  les fonctions

considérées sont  $\mathcal{C}^\infty$  comme convolées d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  et d'une fonction localement intégrable à support compact.

Pour  $n = 2$  on a nécessairement  $j = k = 1$  et il s'agit de montrer que les polynômes  $\check{P}_{p,q}^{1,1}(a, b)$  et  $\check{P}_{p,q}^{1,1}(a, b)$  sont de degré exactement égal à 1. Le pas de récurrence qui va suivre montrera qu'ils sont de degré au plus égal à 1. Il nous suffit donc de montrer que le coefficient de  $\text{Log}|s|^2$  est non nul.

Ceci résulte du calcul de la constante  $\gamma_{1,1}$  qui est fait au paragraphe 3.5.

Supposons démontré que pour  $n \geq 1$  le degré des polynômes  $\check{P}_{p,q}^{1,1}(a, b)$  et  $\check{P}_{p,q}^{1,1}(a, b)$  est au plus égal à  $j + k - 1$  et montrons ceci pour un couple  $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$  vérifiant  $j + k = n + 1$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et calculons la différence

$$F_{p,q}^{j,k}(a, b)[\lambda.s] - \lambda^{p+q} \cdot |\lambda|^{2(a+b+1)} \cdot F_{p,q}^{j,k}(a, b)[s]$$

en utilisant le changement de variable  $u = \lambda.v$ . On obtient  $\frac{i}{4\pi} \cdot \lambda^{p+q} \cdot |\lambda|^{2(a+b+1)}$  multiplier par

$$\int_{1 \leq |v| \leq 1/|\lambda|} (\text{Log}|\lambda| + \text{Log}|s - v|)^j \cdot (s - v)^p \cdot |v|^{2b} \cdot v^q \cdot (\text{Log}|\lambda| + \text{Log}|v|)^k \cdot dv \wedge d\bar{v} + \int_{|v| \leq 1} |s - v|^{2a} \cdot (s - v)^p \cdot |v|^{2b} \cdot v^q \cdot Z \cdot dv \wedge d\bar{v}$$

$$\text{avec } Z := \left[ (\text{Log}|\lambda| + \text{Log}|s - v|)^j \cdot (\text{Log}|\lambda| + \text{Log}|v|)^k - (\text{Log}|s - v|)^j \cdot (\text{Log}|v|)^k \right]$$

On constate que la première intégrale est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$ , et que la seconde est un combinaison linéaire des fonctions  $F_{p,q}^{j',k'}(a, b)$  avec  $j' + k' \leq n$ . On en déduit facilement notre assertion.

De plus, si  $\gamma(j, k)$  désigne le coefficient de  $(\text{Log}|s|)^{j+k-1}$  dans  $\check{P}_{p,q}^{j,k}(a, b)$  le calcul ci-dessus donne la relation de récurrence

$$(j + k - 1) \cdot \gamma(j, k) = j \cdot \gamma(j - 1, k) + k \cdot \gamma(j, k - 1)$$

qui montre immédiatement que si  $\gamma(1, 1)$  est non nul, il en est de même pour tous les  $\gamma(j, k), \forall (j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Nous allons montrer au paragraphe suivant que la constante  $\gamma(1, 1)$  est non nulle, ce qui achèvera la preuve. ■

### 3.5 Le calcul de $\gamma_{1,1}$ .

**Lemme 3.5.1** Pour  $0 \leq x < 1$  et  $p \in \mathbb{Z}$  on a

$$C_p(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}|1 - x.e^{i\theta}|^2 \cdot e^{ip\theta} \cdot d\theta = \frac{x^{|p|}}{|p|} \quad \text{pour } p \neq 0$$

$$C_0(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}|1 - x.e^{i\theta}|^2 \cdot d\theta = 0.$$

Pour  $x > 1$  on a  $C_p(x) = C_p(1/x)$  pour  $p \neq 0$  et  $C_0(x) = \text{Log } x^2$ .

PREUVE. Posons pour  $x \in ]0, 1[$

$$A_p := \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=x} \text{Log}(1-z) \cdot z^p \frac{dz}{z}.$$

Alors on a  $C_p(x) = x^{-p} \cdot A_p - x^p \cdot \bar{A}_{-p}$ . Comme la formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned} A_p &= 0 \quad \text{pour } p \geq 0 \quad \text{et} \\ A_p &= -\frac{1}{p} \quad \text{pour } p < 0 \end{aligned}$$

on conclut facilement. ■

**Proposition 3.5.2** *Pour  $p, q$  deux entiers naturels, posons pour  $s \in D$*

$$F_{p,q}(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{|u| \leq 1} u^p \cdot \bar{u}^q \cdot \text{Log}|s-u| \cdot \text{Log}|u| \cdot du \wedge d\bar{u}.$$

Alors le coefficient du terme en  $s^p \cdot \bar{s}^q \cdot \text{Log}|s|^2$  dans le développement asymptotique en  $s=0$  de  $F_{p,q}$  vaut  $-\frac{1}{4(p+1)(q+1)}$ .

On remarquera que le terme en  $s^p \cdot \bar{s}^q \cdot \text{Log}|s|^2$  est le seul terme non  $\mathcal{C}^\infty$  dans le développement de cette fonction à l'origine.

PREUVE. Commençons par le cas  $p \neq q$ . On a, en posant  $u = s \cdot t$  pour  $s \neq 0$

$$\begin{aligned} F_{p,q}(s) &= s^{p+1} \cdot \bar{s}^{q+1} \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot Z \cdot dt \wedge d\bar{t} \\ \text{avec } Z &:= (\text{Log}|s| + \text{Log}|1-t|) \cdot (\text{Log}|s| + \text{Log}|t|) \end{aligned}$$

Cela donne les trois termes suivants

$$\begin{aligned} A &:= s^{p+1} \cdot \bar{s}^{q+1} \cdot (\text{Log}|s|)^2 \cdot I_1 \\ B &:= s^{p+1} \cdot \bar{s}^{q+1} \cdot (\text{Log}|s|) \cdot I_2 \\ C &:= s^{p+1} \cdot \bar{s}^{q+1} \cdot I_3 \end{aligned}$$

où les intégrales  $I_1, I_2$  et  $I_3$  vont être examinées ci-dessous.

Remarquons déjà que le développement asymptotique de  $A$  ne donnera jamais de contribution au terme qui nous intéresse.

Pour  $B$  nous cherchons le terme constant dans le développement asymptotique de

$$I_2(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot (\text{Log}|1-t| + \text{Log}|t|) \cdot dt \wedge d\bar{t}.$$

Cherchons déjà le terme constant dans le développement de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_2'(s) &:= \frac{i}{4\pi} \int_{1 \leq |t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot (\text{Log}|1-t| + \text{Log}|t|) \cdot dt \wedge d\bar{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1} \cdot C_{p-q}(\rho) \cdot d\rho + \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1} \text{Log} \rho \cdot d\rho \end{aligned}$$

Comme le lemme précédent donne  $C_{p-q}(\rho) = \frac{\rho^{-|p-q|}}{|p-q|}$  puisque l'on suppose  $p \neq q$ , on obtient facilement que le terme constant du développement de  $I_2'(s)$  vaut

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+q+2-|p-q|} + \frac{1}{(p+q+2)^2}.$$

Il nous reste encore à évaluer la constante

$$I_2'' := \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot (\text{Log}|1-t| + \text{Log}|t|) \cdot dt \wedge d\bar{t}$$

ce qui est simple à l'aide du lemme précédent : il donne

$$\begin{aligned} I_2'' &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \rho^{p+q+1} \cdot C_{p-q}(\rho) \cdot d\rho + \int_0^1 \rho^{p+q+1} \text{Log} \rho \cdot d\rho \\ &= \frac{1}{2 \cdot |p-q|} \cdot \left[ \frac{\rho^{p+q+2+|p-q|}}{p+q+2+|p-q|} \right]_0^1 - \frac{1}{(p+q+2)^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot |p-q|} \cdot \frac{1}{p+q+2+|p-q|} - \frac{1}{(p+q+2)^2} \end{aligned}$$

On trouve finalement, comme contribution de  $I_2$  la constante

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2|p-q|} \cdot \left[ \frac{1}{p+q+2-|p-q|} - \frac{1}{p+q+2+|p-q|} \right] \\ &= -\frac{1}{4(p+1)(q+1)} \end{aligned}$$

Cherchons la contribution de  $C$  c'est à dire le terme en  $\text{Log}|s|$  dans le développement asymptotique de

$$I_3(s) := \frac{i}{4\pi} \int_{|t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot (\text{Log}|1-t|) \cdot (\text{Log}|t|) \cdot dt \wedge d\bar{t}$$

Comme le terme constant ne nous intéresse pas, on peut se contenter de regarder

$$\begin{aligned} I_3'(s) &:= \frac{i}{4\pi} \int_{1 \leq |t| \leq 1/|s|} t^p \cdot \bar{t}^q \cdot (\text{Log}|1-t|) \cdot (\text{Log}|t|) \cdot dt \wedge d\bar{t} \\ &= \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1} \cdot C_{p-q}(\rho) \cdot \text{Log} \rho \cdot d\rho \\ &= \frac{1}{|p-q|} \cdot \int_1^{1/|s|} \rho^{p+q+1-|p-q|} \cdot \text{Log} \rho \cdot d\rho \end{aligned}$$

et il n'y a pas de terme en  $\text{Log}|s|$  dans le développement asymptotique de  $I_3(s)$ , puisque  $p+q+2-|p-q| \geq 2$ .

Le cas  $p=q$  est analogue en utilisant le calcul de  $C_0(x)$  dans le lemme précédent, en prenant garde au cas  $x > 1$ . ■

**Corollaire 3.5.3** Soient  $a, b, p, q$  des entiers naturels. Pour  $s \in D^*$ , posons

$$F_{p,q}(a, b)[s] := \frac{1}{4i\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot \text{Log}|s-u| \cdot |u|^{2b} \cdot u^q \cdot \text{Log}|u| \cdot du \wedge d\bar{u}$$

$$F_{p,\bar{q}}(a, b)[s] := \frac{1}{4i\pi} \int_{|u| \leq 1} |s-u|^{2a} \cdot (s-u)^p \cdot \text{Log}|s-u| \cdot |u|^{2b} \cdot \bar{u}^q \cdot \text{Log}|u| \cdot du \wedge d\bar{u}$$

Le coefficient du terme en  $|s|^{2(a+b+1)} \cdot s^{p+q} \cdot \text{Log}|s|$  dans le développement asymptotique de  $F_{p,q}(a, b)$  en  $s = 0$  est égal à

$$-\frac{1}{4} \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \cdot \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+p+q+2)}.$$

Le coefficient du terme en  $|s|^{2(a+b+1)} \cdot s^p \cdot \bar{s}^q \cdot \text{Log}|s|$  dans le développement asymptotique de  $F_{p,\bar{q}}(a, b)$  en  $s = 0$  est égal à

$$-\frac{1}{4} \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+q+1)}{\Gamma(a+b+q+2)} \cdot \frac{\Gamma(a+p+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+p+2)}$$

On remarquera à nouveau que, pour chacune de ces fonctions, le terme considéré est le seul terme non  $\mathcal{C}^\infty$  du développement asymptotique.

PREUVE. La formule du binôme et la proposition précédente donne que le coefficient cherché vaut, pour la fonction  $F_{p,q}(a, b)$ ,

$$\frac{-1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{a+p} \sum_{k=0}^a (-1)^{j+k} \cdot C_{a+p}^j \cdot C_a^k \frac{1}{(b+q+j+1)(b+k+1)} \quad \text{resp.}$$

$$\frac{-1}{4} \cdot \sum_{j=0}^{a+p} \sum_{k=0}^a (-1)^{j+k} \cdot C_{a+p}^j \cdot C_a^k \frac{1}{(b+j+1)(b+q+k+1)}$$

En utilisant la formule

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot C_m^k \frac{1}{n+k} = \frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}$$

on obtient facilement le résultat annoncé. L'autre cas est analogue. ■

REMARQUE. Le corollaire précédent montre, en particulier, que ces coefficients ne sont jamais nuls.

## 4 Références.

- [B. 82] Barlet, D. *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres*, Inv. Math. vol. 68 (1982), p. 129-174.
- [B. 86] Barlet, D. *Calcul de la forme hermitienne canonique pour  $X^a+Y^b+Z^c$* , in Sem. P. Lelong, Lecture Notes, vol. 1198 Springer Verlag (1986), p. 35-46.
- [Bj. 93] Bjork, J.-E. *Analytic D-Modules and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1993.
- [B.-S. 74] Briançon, J. et Skoda, H. *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de  $\mathbb{C}^n$* , C.R.Acad.Sci. Paris série A, 278 (1974), p.949-951.
- [S.-T. 71] Sebastiani, M. and Thom, R. *Un résultat sur la monodromie*, Inv. Math. 13 (1971), p. 90-96.

Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502  
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,  
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.  
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr.