

Examen d'Outils Numériques

Durée : 1 heure 30.

Recommandations : Nous tiendrons compte de la justification des calculs dans la note. Vous rédigerez les démonstrations dans les parties vides laissées entre les exercices. Le document photocopié de cours est autorisé.

Nom :

Prénom :

Note :

Schéma d'ordre quatre en 1D pour la dérivée seconde. Soit \mathcal{M}_h une grille uniforme de \mathbb{R} avec un pas égal à h . Pour une fonction u donnée, on définit : $u_\ell = u(h\ell)$.

1. On souhaite écrire un schéma d'ordre 4 pour approcher la dérivée seconde de u en $h\ell$ sous la forme d'un schéma à 5 points

$$\left(\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2}\right)_{h,\ell}^{(4)} = Au_\ell + a(u_{\ell+1} + u_{\ell-1}) + b(u_{\ell+2} + u_{\ell-2}) \quad (1)$$

A l'aide de développements de Taylor d'ordre suffisamment élevés, montrer que

$$A = -\frac{5}{2h^2} \quad a = \frac{4}{3h^2}, \quad b = -\frac{1}{12h^2} \quad (2)$$

donne bien un schéma d'ordre 4.

2. Si

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{h,\ell}^{(2)} = \frac{u_{\ell+1} + u_{\ell-1} - 2u_\ell}{h^2}$$

montrer que $\left(\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2}\right)_{h,\ell}^{(4)}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{h,\ell}^{(2)}$ et $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{2h,\ell}^{(2)}$.

3. Reliez ce résultat à une technique générale vue en cours pour augmenter l'ordre d'un schéma.

4. On considère maintenant le système d'équations

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & \text{dans }]0; 1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \quad (3)$$

Soit la fonction

$$u^{ref} = x^2 \sin(x) + xe^x.$$

Trouvez f , α et β pour que u^{ref} soit solution de (3).

5. Ecrivez le programme Matlab qui permette de résoudre (3) à l'aide du schéma (1)-(2). Mettez notamment en évidence l'ordre du schéma. Vous enverrez tous vos fichiers à la fin de l'examen (l'heure de réception faisant foi) à l'adresse : Xavier.Antoine@mines.inpl-nancy.fr