

Sujet de Thèse

Titre : Modélisation, analyse et réduction de modèles d'une classe d'équations aux dérivées partielles 3D. Application à un modèle thermomécanique de mise en forme de matériaux semi-transparents.

Directeurs de thèse :

Jean Rodolphe Roche, Professeur à Nancy-Université, IECN-FRCH

Mohamed Boutayeb, Professeur à Nancy-Université, CRAN-FRCH

Ce projet de recherche s'inscrit dans le cadre de la collaboration scientifique entre l'IECN, le LEMTA et le CRAN, sur le problème de la modélisation, simulation, réduction et commande des systèmes de grandes dimensions décrivant le phénomène de thermoformage. Un premier travail, dans le cadre d'un financement post-doc octroyé par Nancy-Université et la Région, a permis de valider le concept d'utiliser un modèle réduit, explicite de dimension un (D1). Cette approche a l'avantage de réduire les temps de calcul d'une manière très significative de façon à pouvoir élaborer des lois de commande fonctionnant en temps réel [7]-[8].

Le travail de recherche que nous proposons, dans le cadre de cette thèse, a pour objectif d'étendre les approches développées au modèle thermomécanique 3D. En effet, il s'agit d'étudier le modèle complet tenant compte des différents couplages mécanique et thermique en 3D pour le thermoformage. Il est important de souligner que c'est un objectif ambitieux qui permettrait d'avancer d'une manière significative vers la modélisation et la réduction des systèmes complexes. En outre, l'octroi d'une bourse de thèse sur ce sujet ne peut que renforcer et soutenir cette collaboration qui nous semble prometteuse car, au delà du problème de thermoformage, les approches développées peuvent être utilisées/étendues à d'autres systèmes physiques décrits par des EDP.

Il est également utile de souligner que même si le sujet proposé est dirigé par l'IECN et le CRAN, l'implication du LEMTA est importante, en particulier, dans la modélisation des phénomènes thermiques et mécaniques mis en jeu.

Le travail à réaliser s'inscrit dans :

- la thématique de recherche de l'équipe d'EDP et Applications de l'IECN
- le thème ACOS (Automatique : Commande et Observation des Systèmes) du CRAN

Le sujet de thèse est composé de trois volets :

Une première partie portera sur la modélisation et l'analyse mathématique du modèle thermomécanique pour la mise en forme de matériaux semi-transparents. Dans la seconde partie, il s'agira d'étudier et de développer un algorithme numérique performant permettant la simulation d'un procédé de mise en forme. L'application ici visée est le thermoformage de matériaux en verre. Le troisième volet, basé sur les résultats des deux premières parties, porte sur le développement d'un modèle réduit et explicite D3 c'est à dire un modèle de dimensions finies écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles non linéaires explicite. Ensuite, faire une analyse structurelle du modèle obtenu afin d'étudier l'Observabilité et la Commandabilité du système.

Les trois parties sont détaillées comme suit :

Partie 1 : Étude mathématique du modèle thermomécanique.

Le système d'équations de transfert radiatif (ETR) et de conduction thermique (CT) a fait l'objet d'un grand nombre d'études. En particulier, la résolution numérique de l'ETR est l'objet d'un ensemble important de publications dans les cas d'une et deux dimensions, voir [1,2].

Dans le cadre des collaborations entre le LEMTA et l'IECN, un travail important a été réalisé sur l'analyse théorique et numérique du système formé par les équations ETR et CT couplées (sans les termes liés au mouvement) avec des résultats sur l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sur la convergence d'un algorithme numérique dans le cas d'une application à un milieu (semi-transparent) fibreux et en une dimension d'espace, voir [3,4]. Le couplage entre les équations ETR et CT est non linéaire et la démonstration d'existence et d'unicité de la solution dans le cas unidimensionnel a été obtenue à l'aide du théorème du point fixe. On prétend utiliser la même technique en géométrie multidimensionnelle. La nouvelle difficulté sera d'obtenir des estimations a priori car les techniques en une dimension ne sont pas applicables aux cas de deux ou trois dimensions d'espace.

Notre modèle est complété par le couplage non linéaire des équations ETR et CT avec l'équation de bilan de la quantité de mouvement (CM). On étudiera le caractère bien posé (existence et unicité de la solution) du modèle thermomécanique défini par les équations ETR, CT et CM, en fonction de la loi de comportement. Pour compléter le modèle de mise en forme, il sera nécessaire de considérer à partir d'un temps t le contact entre la pièce en déformation et le moule.

Partie 2 : Analyse et résolution numérique des équations couplées.

Une autre difficulté sera la conception d'un algorithme numérique pour résoudre l'équation de bilan de la quantité de mouvement en tenant compte des variations des lois de comportement. On se propose d'utiliser une méthode aux éléments finis pour résoudre l'équation CM basée sur le même maillage non-structuré utilisé pour la discrétisation des équations ETR et CT. Par ailleurs, on devra numériquement déterminer le point et le moment du contact pièce-moule pour ensuite tenir compte à travers les conditions au bord du frottement matériel-moule. On pourra s'inspirer des travaux de P. Wriggers [6] pour les aspects numériques. Le couplage thermomécanique (sans rayonnement, i.e. couplage uniquement des équations ETR et CT) a fait l'objet de travaux dans le cas de contact d'un pneu avec le pavé ou dans le cas d'un crash test, voir [6]. Si le problème n'est pas le même que le notre, on pourra néanmoins utiliser les méthodes développées pour localiser le point de contact et le frottement entre deux matériaux. Il s'agira également d'étudier et de développer une méthode numérique pour résoudre le système couplé défini par les équations ETR, CT et CM. Pour ce faire, il faudra étudier une méthode de type Quasi Newton pour traiter les non linéarités et le couplage (le couplage thermomécanique pourra être résolu dans un premier temps en utilisant les lois simples de comportement et de contact). Des techniques mathématique et numérique (préconditionneur) seront également explorées afin d'accélérer la convergence des algorithmes implémentés, en particulier lors de la phase de refroidissement du thermoformage (qui dure au minimum 6h en temps réel). Il faudra aussi mettre en place une méthode d'adaptation du maillage pour mieux simuler les phénomènes de contact et les variations des lois de comportement à l'intérieur du matériel durant le processus de mise en forme.

Partie 3 : Réduction du modèle et analyse structurelle.

Les études menées à ce jour, sur le problème de la modélisation et la simulation des équations thermomécaniques décrivant les matériaux semi-transparents, convergent vers des algorithmes très complexes et très coûteux en temps de calcul. Par conséquent, il est très difficile d'implanter ces algorithmes pour des applications temps réel tel que la conduite d'un

four pour le thermoformage par exemple. Une première étude, dans le cadre d'un financement post-doc, montre que l'on peut utiliser des modèles réduits et approchés pour la simulation et la mise en œuvre de lois de commande en temps réel [7]-[8].

La dernière partie de la thèse sera donc consacrée à une extension de ces résultats c'est-à-dire le développement d'un modèle réduit de dimensions finies. Il s'agit de faire l'analyse et la synthèse de techniques de discrétisation spatiale 3D et temporelle du modèle développé dans la première partie, afin de déduire un modèle sous la forme d'un système d'équations différentielles non linéaires explicite peu coûteux en temps de calcul. Ensuite, il est important de faire une analyse structurelle du modèle obtenu afin d'étudier l'Observabilité et la Commandabilité du système. En effet, ces deux critères nous renseignent sur la possibilité de mettre en œuvre un observateur de l'état à partir de capteurs physiques (un nombre fini) et de développer des lois de commande pour la conduite du système [9]-[10].

Enfin, une part importante de ces travaux sera dédiée à la validation des résultats obtenus, en les confrontant au modèle de référence développé dans les deux premières parties, à travers des simulations numériques. Il s'agit de faire l'évaluation des performances en terme de précision, robustesse aux bruits, robustesse aux erreurs de modélisation, implantation et temps de calcul.

Références

1. G. Widmer, R. Hiptmair, Ch. Schwab, Sparse adaptive finite elements for radiative transfert, *J. Comput Phys.*, 227, n. 12, p. 6071-6105, 2008.
2. V. Agoshkov, *Boundary Value Problems for Transport Equations, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhauser, 1998.
3. F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche. Convergence of a numerical scheme for a nonlinear coupled system of radiative–conductive heat transfer equations. *Mathematical models and Methods in Applied Sciences*, vol. 14 (7), p. 943-974, 2004.
4. F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche, D. Schmitt. Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative–conductive heat transfer problem for a non–grey and anisotropically participating medium. *Transport theory and statistical physics*, vol. 32 (1), p. 1-35, 2003.
5. L. Soudre, Etude numérique et expérimentale du thermoformage d'une plaque de verre. Thèse de doctorat de Nancy-Université, soutenue le 09 décembre 2008.
6. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Springer-Verlag, 2006.
7. S. Faruque Ali, C. Delattre, M. Boutayeb, C. Fonte, F. Asllanaj. An approximate modeling of 1D transient heat transfer in a gray participating medium. *American Control Conference* pp. 5338-5343. Baltimore, USA, June 2010.
8. S. Faruque Ali, C. Delattre, H. Rafaralahy, G. Didier, G. Jeandel, M. Boutayeb. Control of transient coupled radiative-conductive heat transfer equation. *IFAC-Large Scale Systems*, Villeneuve d'Ascq, France, July 2010.
9. Y. Becis-Aubry, M. Boutayeb and M. Darouach. A stable recursive algorithm for state estimation of linear models in the presence of bounded disturbances. *Automatica*, Vol. 44, no 7, p. 1867–1873, 2008.
10. A. Zemouche, M. Boutayeb and Julia Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H infinity performance analysis. *Systems and control letters*. N°57, pp. 18-27, 2008.