

## Généralisations de la conjecture du gap-labeling pour des pavages de complexité locale finie relativement au groupe des isométries affines

Les quasicristaux sont des matériaux aperiodiques découverts au début des années 1980 par D. Shechtman, I. Blech D. Gratias et D. Cahn possédant des propriétés surprenantes. Ils sont suffisamment ordonnés pour présenter une figure de diffraction ponctuelle mais possèdent une symétrie d'ordre cinq interdite pour les cristaux. Les sites atomiques des quasicristaux peuvent être vus comme les ponctuations d'un pavage de complexité locale finie, aperiodique et répétitif. La détermination des bandes d'énergie de conductivité pour les électrons d'un tel matériau est alors un problème crucial en physique des milieux homogènes appelé *gap-labeling*. Au début des années 90, J. Bellissard a donné une formulation mathématique à ce problème en associant à la dynamique du pavage une  $C^*$ -algèbre munie d'une trace canonique puis en réduisant le gap-labeling au calcul de l'image du groupe de  $K$ -théorie de cette algèbre par la forme linéaire induite par sa trace. Il a ensuite conjecturé que cette image devait être égale au groupe des fréquences d'apparitions des motifs locaux du pavage. Au début des années 2000, trois preuves de cette conjecture ont été données simultanément et de façon indépendante par J. Bellissard/R. Benedetti/J.M Gambaudo, M.T. Benameur/H. Oyono-Oyono et et J. Kaminker/I. Putnam pour les pavages euclidiens de complexité locale finie, c'est à dire dont le nombre de motifs d'un diamètre donné est à translation près fini. Une classe d'exemples de pavages du plan ne satisfaisant pas cette propriété a été introduite par C. Radin : ce sont les pavages de type *pinwheel*. Ces pavages sont obtenus par substitutions et à translations près, l'ensemble des prototiles est l'orbite par une rotation d'angle irrationnel de deux triangles rectangles symétriques dont les cotés orthogonaux sont de longueurs entières. Lorsque l'on considère la dynamique de ces pavages sous l'action des isométries affines plutôt que sous l'action des translations, ces pavages deviennent de complexité locale finie. On peut alors

- définir le groupe de fréquence d'apparitions des motifs locaux ;
- associer à la dynamique de ces pavages sous l'action du groupe des isométries affines une  $C^*$ -algèbre munie d'une trace canonique et considérer l'image du groupe de  $K$ -théorie de cette algèbre par la forme linéaire induite par sa trace.

Ces deux invariants sont de natures différentes. Le premier est défini de façon global, c'est un objet de type analytique, alors que le deuxième est de type local. En effet, les fréquences d'apparitions des motifs locaux sont des quantités par définition observables. Bien que l'on ne connaisse pas encore de matériaux aperiodiques modélisés par les pavages de types pinwheel, l'égalité de ces deux invariants apparaît comme la généralisation naturelle de la conjecture du gap-labeling à ce cadre. Ce problème a été résolu complètement par H. Moustafa dans le cas des pavages de type pinwheel dont les cotés orthogonaux des triangles sont de longueurs 1 et 2 (pinwheel de type (1, 2)). Par rapport à la situation euclidienne, une difficulté très sérieuse surgit : l'action des rotations sur l'enveloppe n'est pas libre. Il y a 6 orbites homéomorphes à un cercle et fixées par une symétrie centrale. Pour établir la généralisation du gap-labeling dans ce cadre, il faut faire une étude minutieuse de la structure de l'ensemble des pavages des pinwheel de type (1, 2) localement, au voisinage de ces orbites, afin d'évaluer leurs contributions analytique.

L'objectif de cette thèse est, dans le cadre des pavages de complexité locale finie relativement au groupe des isométries affines du plan et admettant des symétries d'ordre supérieur,

- de faire pour les systèmes dynamiques associés une étude locale systématique au voisinage des orbites fixés par des rotations ;
- d'évaluer en utilisant des méthodes de théorie de l'indice la contribution de ces voisinages dans l'image du groupe de  $K$ -théorie de l'algèbre du pavage par la forme linéaire induite par la trace canonique.

Ceci permettrait de savoir si la conjecture du gap-labeling peut-être généralisées à cette classe de pavages.