(8/2/2011, 11h04)

Proposition de sujet de thèse : Valeurs friables de formes binaires

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n. Un entier friable est un entier sans grand facteur premier.

Soit $F \in \mathbb{Z}[X,Y]$ un polynôme homogène et $\Psi_F(x,y)$ la fonction de comptage des valeurs de F, "y-friables" :

$$\Psi_F(x,y) = |\{1 \leqslant a, b \leqslant x : P^+(F(a,b)) \leqslant y\}|.$$

Récemment Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum ont montré des inégalités de la forme

$$\Psi_F(x,y) \gg x^2$$

valables dans une large région en (x,y).

Le but du sujet est d'établir des formules asymptotiques pour $\Psi_F(x,y)$ quitte à les obtenir dans un domaine en (x,y) plus restreint.

Le cas des formes quadratiques binaires a déjà été résolu par Hanrot, Tenenbaum et Wu.

Lorsque f est de degré $\geqslant 3$, il n'existe pas encore de telles formules asymptotiques.

Une part importante de la thèse porterait sur les formes cubiques. L'étude de telles formes a connu des avancées spectaculaires ces dernières années. Heath-Brown et Moroz ont notamment montré que si F est une forme cubique irréductible vérifiant des conditions assez générales, il existe alors une infinité de nombres premiers p de la forme $p = F(a,b)$. Le sujet de la thèse peut-être vu comme dual du problème de représentation des nombres premiers par un forme binaire.

En plus de leurs intérêts intrinsèques des avancées sur ce sujet ont des répercussions en théorie algorithmique des nombres. Les entiers friables ont un rôle crucial dans l'étude de la complexité de certains algorithmes modernes de factorisation des entiers comme par exemple le crible algébrique. Le réglage de plusieurs phases de ces algorithmes est lié à des problèmes de distribution des entiers friables dans des suites d'entiers polynomiales. Une formule asymptotique pour Ψ_F même conjecturale serait utile dans le choix initial du polynôme de l'algorithme du crible algébrique.

Références

[1] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, G. Tenenbaum, Friable values of binary forms, Commentarii Math. Helv. (à paraître).

[2] G. Hanrot, G. Tenenbaum, J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2, Proc. London Math. Soc. **96**, (2008), 107-135.

[3] D. R. Heath-Brown, Primes represented by $x^3 + 2y^3$, Acta Mathematica, **186**, (2001), 1-84.

[4] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz, On the representation of primes by cubic polynomials in two variables, Proc. London Math. Soc. (3) **88** (2004), no. 2, 289-312.