Proposition de sujet de thèse 2012 - Ecole Doctorale IAEM Lorraine

Jean-Pierre Croisille

Laboratoire Mathématiques et Applications de Metz, UMR 7122,
Université de Metz
jean-pierre.croisille@univ-metz.fr

1 Contexte scientifique

Ce sujet de thèse s'adresse à tout étudiant en mathématiques appliquées titulaire d'un master M2 Recherche, ayant un fort intérêt pour le calcul scientifique et pour les méthodes mathématiques qui s'y rattachent : théorie de l'interpolation, méthodes spectrales, transformée de Fourier rapide, algorithmes de calcul, informatique graphique, étude mathématique des équations aux dérivées partielles. Une bonne expérience de la programmation scientifique est vivement souhaitée (matlab avancé, FORTRAN 90, C). Les mots clés sont:

- Méthodes mathématiques du calcul scientifique
- Algorithmes rapides, FFT, algèbre linéaire numérique.
- Géométrie sphérique.
- Schémas volumes finis, différences finies.
- Analyse numérique et fonctionnelle.
- FORTRAN 90, matlab.

Ce sujet de thèse est de nature fondamentale. Il n'est pas financé par un soutien industriel ou par une bourse de thèse d 'un grand organisme.

Cependant, les applications potentielles des algorithmes développés sont très nombreuses. On peut citer:

- Equations de la climatologie et de l'océanographie.
- Etude de la cartographie du champ gravitationnel.
- Imagerie en astrophysique ou dans le domaine médicale.

2 Sujet

Le sujet de thèse proposé s'intitule

Schémas compacts hermitiens sur la sphère - Applications à différents problèmes issus de la physique

3 Schémas compacts hermitiens

Les schémas compacts sont un type particulier de schémas aux différences souvent utilisés pour la simulation de la turbulence fluide, (DNS ou LES), [7]. Dans une géométrie cubique sur maillage cartésien, ce sont actuellement parmi les meilleurs schémas en terme de précision. Ils ont par contre été très peu utilisés jusqu'à présent pour des raisons pratiques (beoin en géométries complexes) dans les codes industriels.

4 Méthodes numériques sur la sphère

De nombreux problèmes physiques sont posées de faąn naturelle sur la sphère. Cela a donné lieu à l'utilisation de bases de fonctions spéciales adaptées. La plus connue d'entre elle, analogue des séries de Fourier, est la base des *harmoniques sphériques.* Cette base de fonctions est très utilisée dans les domaines suivants:

- *Climatologie*
  par exemple en climatologie (dynamique de l'atmosphère terrestre à grande échelle) et en océanographie.
- *Gravitation*
  L'analyse des irrégularités du champ gravitationnel est également analysé comme un modèle posé sur la sphère.
- *Cosmologie*
  En cosmologie, on rencontre égalemebnt des modèles posés sur la sphère. Il s'agit dans ce cas de la sphère celleste.

Ces questions requierent toutes la capacité d'effectuer des calculs sur la sphère, que ce soit des calculs d'interpolation de données ou de calcul de solutions d'équations aux dérivées partielles.

5 Schémas aux différences sur la sphère

5.1 Introduction

Le développement de nouveaux schémas aux différences sur la sphère est une question qui prend de l'importance avec les développements des études en climatologie sur le réchauffement climatique. Il s'agit de formuler des chémas aux différences sur une surface sphérique, en tenant compte de la géométrie particulière de la sphère.

5.2 Développements récents

Le sujet proposé s'inscrit dans le programme de travail consacré aux schémas compacts développé au LMAM (Laboratoire de mathématiques de Metz, UMR CNRS 7122) depuis plusieurs années. Un code de calcul en 2D et 3D en F90 a récemment été developpé pour le problème de Poisson (thèse de A. Abbas). Le schéma est d'ordre 4 pour l'inconnue principale et pour le gradient. De très bonnes performances calcul ont été obtenues sur une machine de bureau. A titre d'exemple, un calcul sur un maillage 1024x1024 est effectué en moins de cinq secondes sur un PC ordinaire. Ce solveur rapide sert de préconditionnement à des problèmes elliptiques non réguliers. Une autre développement récent concerne les maillages cartésiens multiéchelle. Ce type de maillages permet une résolution locale également d'ordre 4 sur des zones raffinées. Le raffinement est récursif.

Il s'agit de généraliser ce type de schémas au contexte sphérique.

6 Description des travaux envisagés

6.1 Etudes préliminaires

Dans un premer temps, le candidat doit se familiariser avec

- Les concpets élémentaires de la géométrie différentielle: métrique, carte, représentation d'une fonction d'un champ de vecteurs en coordonnées locales,...
- L'approximation d'une équation aux dérivées partielles par des schémas compacts: dissipation, dispersion, schéma stable, ordre de précision, ...

6.2 Le maillage de type *cubed sphere*

Le maillage de la sphère au centre de l'étude est le maillage dit "cubed sphere" introduit à l'origine dans [10]. Ce maillage est de plus en plus utilisé dans de nombresu travaux de simulation sur la sphèrem,[9]. Le candidat devra se famililariser avec la géométrie de ce maillage. En parallèle, il faut naturellement se familiariser avec le maillage classique dit "longitude/latitude" et les tranformations rapies qui lui sont attachés (transformation rapide en harmoniques sphériques, [8]).

6.3 Code de calcul

Un code de calcul prototype est actuellement disponible. Il résoud l'équation de convection-diffusion sur la sphère. Ce code de calcul sera la base des développements ultérieurs.

6.4 Schémas compacts sur la sphère

L'étape suivante consiste en le design, l'étude mathématique, l'analyse numérique des schémas boîte hermitiens sur la sphère. Il s'agit de généraliser le schéma boîte hermitien à la géométrie sphérique. Plusieurs points sont à examiner en détail: Possibilité de définir le schéma de façon intrinsèque ou de façon dépendante des coordonnées. Le point le plus important consiste ensuite en la mise au point d'un solveur rapide permettant de résoudre des problèmes d'interpolation ou d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de type FFT. Un point de comparaison important est donné par les calculs rapides en harmoniques sphériques. L'implémentation effective est évidemment essentielle.

6.5 Equations de Saint-Venant sur la sphère terrestre en rotation

L'application attendue des travaux précédents sera la simulation des équations de type SW (Saint-Venant) sur la sphère terrestre en rotation. Ces équations de type hyperbolique sont le modèle de base pour la dynamique atmosphérique à grande échelle. L'aboutissement du travail comporte l'implémentation d'un code de calcul F90 pour ces équations. Ce travail sera développé à partir des codes existants. L'analyse numérique du schéma ainsi développé constitue la suite naturelle du travail d'implémentation.

7 Laboratoire d'accueil, financement

Le laboratoire d'accueil est le LMAM (Laboratoire de Mathématiques de Metz, UMR CNRS 71-22) puis l'IECL (Institut Elie Cartan de Lorraine à partir de janvier 2013).

8 Références

On renvoie pour plus d'informations à [2], [1], [5], [6], [4], [3].

Références

[1] A. Abbas. *Schémas compacts hermitiens: algorithmes rapides pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Univ. Paul Verlaine - Metz, Nov. 2011.

[2] A. Abbas and J-P. Croisille. A fourth order Hermitian Box-Scheme with fast solver for the Poisson problem in a square. *J. Sci. Comput.*, 49:239–267, 2011.

[3] M. Ben-Artzi, J-P. Croisille, and D. Fishelov. *Navier-Stokes equations in planar domains*. Imperial College Press, ISBN 9781848162754, 2012.

[4] M. Ben-Artzi, J-P. Croisille, D. Fishelov, and S. Trachtenberg. A Pure-Compact Scheme for the Streamfunction Formulation of Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 205:640–664, 2005.

[5] J-P. Croisille. Keller's box-scheme for the one-dimensional stationary convection-diffusion equation. *Computing*, 68:37–63, 2002.

[6] J-P. Croisille. Hermitian interpolation on the cubed-sphere grid. 2011, preprint.

[7] S. K. Lele. Compact finite-difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103:16–42, 1992.

[8] V. Rokhlin and M. Tygert. Fast algorithms for spherical harmonic expansions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27:1903–1928, 2006.

[9] C. Ronchi, R. Iacono, and P. S. Paolucci. The Cubed Sphere: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 124:93–114, 1996.

[10] R. Sadourny. Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uiform spherical grids. *Mon. Weath. Rev.*, 100:136–144, 1972.